UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Première année de

Mathématiques-Physique-Informatique

Cours d'Analyse I

Bakary MANGA

Année universitaire 2022-2023

Table des matières

Introduction Générale

Nombres réels

Sommaire

Pour asseoir l'analyse sur des fondements rigoureux, il a été nécessaire de mettre sur place une construction solide des nombres réels. Jusqu'aux environs des années 1860 l'existence des nombres réels et leurs propriétés sont admises, par exemple par Augustin Louis Cauchy (Français, 1789-1857) dans son cours de 1821. Mais quelques années auparavant, en 1817 précisément, Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (Autrichien, 1781- 1848) établit qu'une partie non vide majorée de réels admet une borne supérieure. Les travaux de Bolzano restèrent cependant peu connu jusqu'aux environs de 1865 avec les travaux de Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Allemand, 1815-1897). Les premières constructions basées sur les suites de Cauchy sont dues à Hugues Charles Robert Méray (Français, 1835-1911) en 1869 et à Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (Allemand, 1845-1918) dont les travaux sont exposés par Christian Johann Heinrich Heine (Allemand, 1797-1856) en 1872. C'est en cette année 1872 que Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) publia sa construction des réels aux moyens des coupures. Les principales démonstrations sur les nombres réels sont l'oeuvre de Ulisse Dini (Italien, 1845-1918) qui publia un traité en 1878.

L'objectif de ce chapitre est de donner les éléments de construction des nombres réels ainsi que leurs propriétés fondamentales : propriété d'Archimède, bornes supérieures, bornes inférieures, notion de densité, etc.

1.1 Quelques ensembles usuels de nombres

1.1.1 Les entiers

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Comme chaque entier naturel n admet un successeur qui est $n + 1$, il est aisé de se convaincre que $\mathbb{N}$ est un ensemble infini. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels non nuls. On munit $\mathbb{N}$ des opérations usuelles telles que l'addition "+" et la multiplication "$\times$" dont on suppose connues les propriétés : commutativité, associativité, existence d'éléments neutres, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Il est facile de s'assurer que l'addition et la multiplication sont des opérations qui ont leurs résultats dans $\mathbb{N}$. On dit alors que $\mathbb{N}$ est stable pour l'addition et la multiplication ou que l'addition et la multiplication sont des lois internes de $\mathbb{N}$. Par contre, l'équation $x+1 = 0$, d'inconnu x, n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, léquation $x + n = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$. D'où la nécessité de créer un ensemble $\mathbb{Z}$, contenant $\mathbb{N}$ tel que pour tout élément $x \in \mathbb{Z}$, il existe un élément $x' \in \mathbb{Z}$ tel que

$x + x' = 0$. Les éléments de $\mathbb{Z}$ sont appelés entiers relatifs et pour tout $x \in \mathbb{Z}$, l'élément $x' \in \mathbb{Z}$ tel que $x + x' = 0$ sera noté $-x$. Ainsi, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

L'ensemble $\mathbb{Z}$, introduit pour pallier les carences de l'ensemble $\mathbb{N}$, s'est révélé très vite insuffisant. Il n'est, en effet, pas possible de résoudre l'équation $3x = 2$, d'inconnu x, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. Il est donc encore nécessaire d'introduire un ensemble, dont les éléments sont du type $\dfrac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

1.1.2 Les rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$ dans lequel on identifie la fraction $\dfrac{a}{b}$ avec $\dfrac{a \times n}{b \times n}$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et $b, n \in \mathbb{Z}^*$. On désignera par $\mathbb{Q}^* = \left\{\dfrac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}^* \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$. On munit $\mathbb{Q}$ des opérations $+$ et $\times$; et de la relation d'ordre totale $\leq$ et on a les propositions suivantes.

Proposition 1.1. *Le triplet $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps commutatif, c'est-à-dire qu'il vérifie les propriétés suivantes : pour tous éléments x, y, z de $\mathbb{Q}$,*

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
2. $x + y = y + x$;
3. $0 + x = x$;
4. *il existe $-x$ dans $\mathbb{Q}$ tel que $x + (-x) = 0$;*
5. $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$;
6. $x \times y = y \times x$;
7. $1 \neq 0$ *et* $1 \times x = x$;
8. *si $x \neq 0$, il existe $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ tel que $x \times x^{-1} = 1$;*
9. $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

Proposition 1.2. *Muni de la relation d'ordre totale $\leq$, le corps $(\mathbb{Q}, +, /times)$ satisfait la propriété suivante dite d'Archimède :*

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \;/\; x > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} \;/\; n \times x > y.$$

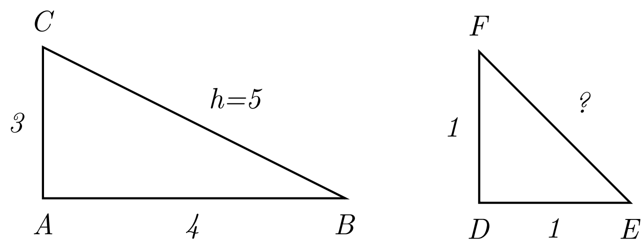
Précisément, cela peut s'écrire : $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $(x > 0) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N} / \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ fois}} > y)$.

Remarquons également que la relation d'ordre totale vérifie :

— $(x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$;
— $(0 \leq x,\ 0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq x \times y)$;
— $(x \leq 0,\ 0 \leq y) \Rightarrow (x \times y \leq 0)$

Remarquons d'abord que l'ensemble $\mathbb{Q}$ présente beaucoup d'insuffisances que nous découvrirons au fur et à mesure de l'évolution de ce cours.

1.1.3 Une première carence du corps $\mathbb{Q}$: inexistence de solution de l'équation $p^2 = 2$



En restant dans $\mathbb{Q}$, nous savons calculer la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle ABC mais pas celle du triangle rectangle DEF. Autrement dit il n'existe pas de nombre rationnel p tel que

$$p^2 = 2. \tag{1.1}$$

En effet, supposons l'existence d'un rationnel $p = \dfrac{m}{n}$, où $(m,n) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ avec m et n premiers entre eux. D'après (1.1), nous avons $m^2 = 2n^2$; c'est-à-dire que m^2 est pair et par suite m est pair. D'où m^2 est divisible par 4. C'est pourquoi l'égalité $m^2 = 2n^2$ nous permet de dire que n^2 est pair et par conséquent n aussi est pair. On aboutit alors à une contradiction.

Il suit donc que l'ensemble des nombres rationnels est plein de "trous" malgré qu'entre deux nombres rationnels distincts p et q $(p < q)$ il existe toujours un troisième (rationnel) ℓ tel que $p < \ell < q$; on peut par exemple prendre $\ell = \dfrac{p+q}{2}$. Nous sommes donc contraints d'introduire d'autres nombres : les nombres dits "irrationnels". Voici quelques exemples de nombres irrationnels.

1. Le nombre $\pi = 3,1415\cdots$ défini comme étant la circonférence d'un cercle de diamètre 1.
2. Le nombre e d'Euler défini comme somme infinie

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

1.2 L'ensemble des nombres réels

1.2.1 Nombre réel

Définition 1.1. On appelle nombre décimal tout nombre d qui s'écrit sous la forme $d = 10^n k$, où n et k sont deux entiers relatifs.

Définition 1.2. Un nombre réel est une collection de chiffres $\{c_0, \ldots, c_m\}$ et $\{d_1, d_2, \ldots\}$ compris entre 0 et 9. Les chiffres c_i sont en nombre fini et les chiffres d_j peuvent être en nombre infini. On fait correspondre à cette collection le nombre x donné par le développement décimal $x = c_m c_{m-1} \ldots c_1 c_0, d_1 d_2 d_3 \ldots d_n \ldots$ et la suite ne se termine pas par une infinité de 9. Le nombre réel x est alors l'unique nombre qui satisfait la double inéquation suivante : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$c_m c_{m-1} \ldots c_1 c_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_k}{10^k} \leq x < c_m c_{m-1} \ldots c_1 c_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}. \tag{1.2}$$

Cette construction présente notamment la difficulté de donner des algorithmes simples pour la multiplication, et même pour l'addition dans des cas tels que $3 \times 0,333\ldots$ ou $0,333\ldots + 0,666\ldots$ Il existe d'autres constructions dont

— les coupures de Dedekind, qui définissent, via la théorie des ensembles, un réel comme l'ensemble des rationnels qui lui sont strictement inférieurs ;

— les suites de Cauchy, qui définissent, via l'analyse, un réel comme une classe d'équivalence de suites de rationnels convergeant vers lui.

Exemple 1.1.

1. Les décimales du nombre π sont $c_0 = 3$, $d_1 = 1$, $d_2 = 4$, $d_3 = 1$, ...
2. S'il n'y a qu'un nombre fini de décimales d_j non nulles, alors le réel x est un rationnel et

$$x = c_m 10^m + c_{m-1}10^{m-1} + \cdots + c_1 10 + c_0 + d_1 10^{-1} + \cdots + d_n 10^{-n}. \tag{1.3}$$

Proposition 1.3. *Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Faire la preuve $\square$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'ensemble des nombres réels non nuls. Sur $\mathbb{R}$, on définit deux lois internes : une loi dite **somme** et notée "+", une autre loi dite **produit** notée "$\cdot$" ; ainsi qu'une relation d'ordre notée "$\leq$". Ces lois satisfont les propriétés suivantes.

Théorème 1.1. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *est un corps commutatif, totalement ordonné, archimédien.*

On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels $x \geq 0$ et $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des nombres réels $x \leq 0$.

Proposition 1.4. *La relation d'ordre est compatible avec l'addition par un réel quelconque, et avec la multiplication par un réel positif :*

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$;
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x < y) \Rightarrow (x + z < y + z)$;
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}_+$, $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$;
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}_+^*$, $(x < y \Rightarrow xz < yz)$;
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}_-^*$, $x < y \Rightarrow xz > yz$.
6. $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $0 < x \leq y \Longleftrightarrow 0 < \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$;
7. $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $x \leq y < 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x} < 0$;
8. $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $x < 0 < y \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x} < 0 < \dfrac{1}{y}$;
9. $\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ *et* $z \leq t \Longrightarrow x + z \leq y + t$;
10. $\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ *et* $z < t \Longrightarrow x + z < y + t$;
11. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$, $\forall z, t \in \mathbb{R}_+$, $x \leq y$ *et* $z \leq t \Longrightarrow xz \leq yt$;
12. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a :* $x \leq y \Longleftrightarrow x^n \leq y^n$.
13. $\forall x \in \mathbb{R}_+$ *et* $\forall n, m \in \mathbb{N}$, *on a :* $x \leq 1$ *et* $n \leq m \Longrightarrow x^n \geq x^m$.
14. $\forall x \in \mathbb{R}_+$ *et* $\forall n, m \in \mathbb{N}$, *on a :* $x \geq 1$ *et* $n \leq m \Longrightarrow x^n \leq x^m$.

Proposition 1.5. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Formule du binôme de Newton : pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a :*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k x^k y^{n-k}. \tag{1.4}$$

2. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a :*

$$x^n - y^n = (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k\right). \tag{1.5}$$

3. *Inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tous réels $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$, on a :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i}^{n} y_i^2\right). \tag{1.6}$$

1.2.2 Notion de valeur absolue - Distance sur $\mathbb{R}$

Définition 1.3. On appelle valeur absolue d'un réel x, le réel noté $|x|$ défini par : $|x| = \max\{x, -x\}$.

Remarque 1.1. Il résulte de cette définition de la valeur absolue d'un nombre réel x que :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |-x|$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ et $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Proposition 1.6. *Soient x, y et a des nombres réels. On a :*

1. $|xy| = |x||y|$,
2. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ *si* $y \neq 0$,
3. $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$,
4. $|x| = |y| \Longleftrightarrow x^2 = y^2$,
5. $|x| \leq |y| \Longleftrightarrow x^2 \leq y^2$,
6. $\forall\, \varepsilon > 0, |x-a| < \varepsilon \Longleftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$,
7. $\forall\, \varepsilon > 0, |x-a| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$.

Définition 1.4. On appelle distance sur $\mathbb{R}$ toute application $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant : pour tous x et y,

1. $d(x, y) \geq 0$;
2. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

$d(x, y)$ est appelé distance entre les réels x et y.

Exemple 1.2. Considérons l'application d définie par : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |x - y|$. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$. C'est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.

1.3 Borne supérieure et borne inférieure

1.3.1 Majorants - Minorants

Définition 1.5 (Majorant-Minorant). Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Q}$).

- On dit que A est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (resp. $M \in \mathbb{Q}$) tel que pour tout $x \in A$ on a $x \leq M$. Dans ce cas le réel M est appelé un majorant de A dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{Q}$).
- On dit que A est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{Q}$) tel que pour tout $x \in A$ on a : $x \geq m$. Dans ce cas le réel m est appelé un minorant de A dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{Q}$).
- On dit que A est **borné** si A est à la fois majorée et minorée.

Définition 1.6 (Élément maximal - Élément minimal). Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Q}$), M et m deux éléments donnés de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Q}$).

- On dit que M est le plus grand élément ou maximum (ou élément maximal) de A si $M \in A$ et M est un majorant de A dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Q}$). On note alors $M = \max A$ ou $M = \max(A)$.
- On dit que m est le plus petit élément ou minimum (ou élément minimal) de A si $m \in A$ et m est un minorant de A dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Q}$). On note alors $m = \min A$ ou $m = \min(A)$.

Proposition 1.7 (Unicité de l'élément maximal (resp. minimal))**.** *Si A possède un maximum (resp. minimum), alors il est unique.*

Proposition 1.8. *Tout sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{R}$ possède un maximum (resp. un minimum).*

Démonstration. Soit A un ensemble à n éléments (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Nous allons faire une récurrence sur n.

- ♣ Pour $n = 1$, A est un singleton $\{a\}$ et a est le maximum de A.
- ♣ Pour $n > 1$, supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $(n-1)$ et montrons que c'est aussi vrai à l'ordre n. On fixe un élément x de A et on considère l'ensemble $B = A \setminus \{x\}$. Alors B est un sous-ensemble de A (donc de $\mathbb{R}$) possédant $(n-1)$ éléments. Par conséquent, d'après l'hypothèse de récurrence, B possède un maximum $M \in B$. Si $x \leq M$ alors M est aussi un maximum pour A, sinon alors x est le maximum de A. □

Exemple 1.3.

1. Si $A_2 = \mathbb{N}$, $\min A_2 = 0$ mais A_3 n'a pas d'élément maximal.
2. $A_3 = \mathbb{Z}$, n'admet ni d'élément minimal ni d'élément maximal.

1.3.2 Borne supérieure - Borne inférieure

Définition 1.7 (Borne supérieure et borne inférieure)**.** Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que :

- $s \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de A si s est un majorant de A et s est le plus petit des majorants de A ; on note alors $s = \sup A$;
- $i \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de A si i est un minorant de A et i est le plus grand des minorants de A ; on note alors $i = \inf A$.

Théorème 1.2 (Axiome des bornes supérieure et inférieure)**.**

— *Toute partie non vide et majorée A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.* ***Autrement dit, si** A **est une partie non vide et majorée de** $\mathbb{R}$ **alors*** $\sup(A) \in \mathbb{R}$**.**

— *Toute partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.* ***Autrement dit, si** A **est une partie non vide et minorée de** $\mathbb{R}$ **alors*** $\inf(A) \in \mathbb{R}$**.**

— *De plus, si A est minorée, alors $-A := \{-a,\, a \in A\}$ est majorée et on a :*

$$\inf(A) = -\sup(-A). \tag{1.7}$$

Théorème 1.3 (Caractérisation des bornes supérieure et inférieure)**.** *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

- *Si A est majorée, alors la* ***borne supérieure*** *ou* ***supremum*** *de A est l'unique réel s caractérisé par la propriété :*

$$\begin{cases} \forall\, x \in A, \quad x \leq s \\ \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon \in A \ /\ s - \varepsilon < x_\varepsilon \leq s. \end{cases} \tag{1.8}$$

- *Si A est minorée, alors la* ***borne inférieure*** *ou* ***infimum*** *de A est l'unique réel i caractérisé par la propriété :*

$$\begin{cases} \forall\, x \in A, \quad i \leq x \\ \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon \in A \ /\ i \leq x_\varepsilon < i + \varepsilon. \end{cases} \tag{1.9}$$

Le Théorème 1.2 est faux dans $\mathbb{Q}$ comme le montre le paragraphe suivant.

1.3.3 Une deuxième carence du corps $\mathbb{Q}$: partie majorée n'admettant pas de borne supérieure et partie minorée n'admettant pas de borne inférieure

Soient $A = \{p \in \mathbb{Q} : p \geq 0 \text{ et } p^2 < 2\}$ et $B = \{p \in \mathbb{Q} : p \geq 0 \text{ et } p^2 > 2\}$. Nous allons montrer que l'ensemble A ne possède pas un plus grand élément et que l'ensemble B ne possède pas un plus petit élément. Plus précisément nous montrons que :

— quelque soit $p \in A$, il existe $q \in A$ tel que $p < q$; et

— quelque soit $p \in B$, il existe $q \in B$ tel que $q < p$.

a) Soit p un élément de A arbitrairement choisi, alors $p^2 < 2$. Si nous posons $q = p + h$ avec $0 < h < 1$, il vient que $q > p$ et

$$q^2 = p^2 + (2p + h)h < p^2 + (2p + 1)h.$$

Pour que $q^2 < 2$, il suffit que $h < \dfrac{2 - p^2}{2p + 1}$; soit par exemple $h = \dfrac{1}{2} \min\left(1, \dfrac{2 - p^2}{2p + 1}\right)$. D'où A n'admet pas de plus grand élément.

b) Soit maintenant p un élément quelconque de B, alors $p^2 > 2$. En posant $q = p - \dfrac{p^2 - 2}{2p} = \dfrac{p}{2} + \dfrac{1}{p}$, il suit que $0 < q < p$ et

$$q^2 = p^2 - (p^2 - 2) + \left(\frac{p^2 - 2}{2p}\right)^2 > p^2 - (p^2 - 2) = 2,$$

c'est-à-dire $q \in B$ et ainsi l'ensemble B n'admet pas de plus petit élément.

Il suit donc que si A (resp. B) admettait une borne supérieure $s \in \mathbb{Q}$ (resp. borne inférieure $i \in \mathbb{Q}$), on aurait $s^2 = 2$ (respectivement $i^2 = 2$). Ce qui est impossible d'après le paragraphe 1.1.3

1.3.4 Droite numérique achevée

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'a ni plus grand ni plus petit élément. On lui ajoute les deux éléments $-\infty$ (moins l'infini) et $+\infty$ (plus l'infini) de façon à obtenir l'ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$ appelé la droire réelle achevée : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On prolonge partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ la structure algébrique de $\mathbb{R}$ en posant :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $-\infty < x < +\infty$;
2. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x \neq -\infty$, on a $x + (+\infty) = +\infty$;
3. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x \neq +\infty$, on a $x + (-\infty) = -\infty$;
4. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x > 0$, on a $x \cdot (-\infty) = -\infty$ et $x \cdot +\infty = +\infty$;
5. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x < 0$, on a $x \cdot (-\infty) = +\infty$ et $x \cdot +\infty = -\infty$.

Les opérations $(+\infty) + (-\infty)$ et $0 \cdot (\pm\infty)$ ne sont pas bien définies.

Remarque 1.2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Si A n'est pas minoré, on pose $\inf A = -\infty$.
- Si A n'est pas majoré on pose $\sup A = +\infty$.

1.4 Racine n-ième d'un nombre réel positif

Théorème 1.4 (Racine n$^{\text{ième}}$ d'un réel positif)**.** *Pour tout nombre réel strictement positif x et pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique réel positif y tel que $y^n = x$. Le réel y est appelé racine n$^{\text{ième}}$ de x. On note $y = \sqrt[n]{x}$ ou bien $y = x^{\frac{1}{n}}$.*

Proposition 1.9. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \qquad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Démonstration. A montrer en exercice □

Remarque 1.3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que n est pair. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $y^n = (-y)^n > 0$.
   (a) Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour entier naturel non nul pair n, l'équation $y^n = x$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: $y_1 = \sqrt[n]{x}$ et $y_2 = -\sqrt[n]{x}$.
   (b) Par contre pour $x \in \mathbb{R}_-^*$ et pour entier naturel non nul pair n, l'équation $y^n = x$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que n est impair. Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, on a $(-y)^n = -y^n$. Ainsi pour tous $x \in \mathbb{R}$ et n impair, l'équation $y^n = x$, d'inconnue y, admet une solution unique dans $\mathbb{R}$: $y = signe(x)\sqrt[n]{|x|}$.

1.5 Partie entière - Approximation d'un réel

1.5.1 Partie entière

Théorème 1.5 (Principe d'Archimède pour la loi + dans $\mathbb{R}$)**.** *Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y > 0$. Alors il existe un et un seul entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ny \leq x < (n+1)y$.*

Proposition 1.10. *Quel que soit le réel x, il existe un unique entier relatif p satisfaisant $p \leq x < p+1$. L'entier p est appelé* **partie entière de x** *et on note $p = E(x) = [x]$.*

Démonstration. On applique le principe d'Archimède pour la loi + dans $\mathbb{R}$, en prenant $y = 1$. $\square$

Remarque 1.4.

1. $E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z};\ \ n \leq x\}$.
2. Pour tout nombre réel x, on a : $E(x) \in \mathbb{Z}$ et $E(x) \leq x < E(x) + 1$.
3. Pour tout nombre réel x, on a : $E(x) \in \mathbb{Z}$ et $x - 1 < E(x) \leq x$.
4. Pour tous nombres réels x et y, on a : $x \leq y \Longrightarrow E(x) \leq E(y)$.
5. Pour tous nombres réels x et y, on a : $x < y \Longrightarrow E(x) \leq E(y)$.
6. Le réel $m(x) = x - E(x)$ est appelé **mantisse de x** et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $m(x) \in [0, 1]$.

1.5.2 Approximation d'un réel

Soit x un nombre réel, p un entier naturel. On a :

$$E(x \cdot 10^p) \leq x \cdot 10^p < E(x \cdot 10^p) + 1. \tag{1.10}$$

D'où $10^{-p}E(x \cdot 10^p) \leq x < 10^{-p}E(x \cdot 10^p) + 10^{-p}$. Ainsi, $10^{-p}E(x \cdot 10^p)$ est un nombre décimal approchant x à 10^{-p} près par défaut et $10^{-p}E(x \cdot 10^p) + 10^{-p}$ est un nombre décimal approchant x à 10^{-p} près par excès.

Exemple 1.4. Donner une approximation de π à 10^0 près, à 10^{-1} près, à 10^{-2} près et à 10^{-3} près.

1.6 Nombres complexes

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des lois d'addition et de multiplication données par :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), \tag{1.11}$$

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab + a'b), \tag{1.12}$$

pour tous $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2$. Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés **nombres complexes**. On admet le

Théorème 1.6. $\mathbb{C}$ *est un corps commutatif et l'application $x \mapsto (x, 0)$ est un homomorphisme injectif du corps $\mathbb{R}$ dans le corps $\mathbb{C}$.*

On peut donc identifier $\mathbb{R}$ à un sous-corps de $\mathbb{C}$. Posant $(0,1) = i$ et identifiant $(x,0)$ avec x, on a alors $(x,y) = x+iy$: c'est la notation usuelle des nombres complexes. On a : $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1 + 0 \times i = -1$.

Si $z = (x,y) = x + iy$ est un élément de $\mathbb{C}$, le nombre réel x est appelé la *partie réelle* de z et est noté $\Re(z)$ ou $\mathrm{Re}(z)$ tandis que le nombre réel y est appelé la *partie imaginaire* de z et est notée $\Im(z)$ ou $Im(z)$.

Définition 1.8. On appelle module du nombre complexe $z = x + iy$ le nombre positif $|z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$.

Il est claire que si z est un réel, son module se confond avec sa valeur absolue.

Définition 1.9. On appelle argument d'un nombre complexe $z = x+iy$ la classe modulo 2π des nombres réels θ qui vérifient $\cos\theta = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{|z|}$. On note $\arg z$ l'un quelconque des éléments de cette classe.

Définition 1.10. On appelle conjugé d'un nombre complexe $z = x+iy$, le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$.

Proposition 1.11. *Quels que soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a*

1. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$;
3. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad (mod.2\pi)$;
4. $\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Pour majorer une somme de nombres complexes, on peut utiliser la

Proposition 1.12. *Soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes. On a*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|. \tag{1.13}$$

Les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski s'étendent aux nombres complexes sous la forme

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right), \tag{1.14}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.15}$$

Ces inégalités sont des égalités si on a $b_i = \lambda\bar{a}_i$ (ou $a_i = \lambda\bar{b}_i$), où λ est un réel.

Suites numériques

Sommaire

Dans ce chapitre par $\mathbb{K}$ nous désignerons $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 2.1. On appelle suite numérique (réelle ou complexe) toute application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$.

A la place de la notation fonctionnelle $u(n)$, on utilise la notation indicielle u_n. L'expression u_n est appelé terme général de la suite. Une suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sera alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ ou simplement (u_n).

Définition 2.2. Une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ est dite stationnaire s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_{n_0}$, pour tout $n \geq n_0$, c'est-à-dire que la suite est constante à partir d'une certaine valeur de n.

Définition 2.3. Une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ est dite bornée s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que : $|u_n| \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.1. Pour qu'une suite soit bornée, il suffit qu'elle le soit à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il exsite $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq M$, pour tout $n \geq n_0$. En effet, dans ce cas la suite (u_n) est alors bornée par le nombre $M' = \sup\{|u_0|, \dots, |u_{n-1}|, M\}$.

Définition 2.4. Une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ est dite convergente (dans $\mathbb{K}$) s'il existe un élément $\ell \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geq n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Théorème 2.1. *Si une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ est convergente, il existe un unique $\ell \in \mathbb{K}$ qui satisfait (2.1).*

Démonstration. Remarquons d'abord que si un élément $x \in \mathbb{K}$ est tel que $|x| < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, alors $x = 0$. Maintenant, supposons qu'il existe deux éléments ℓ et ℓ' de $\mathbb{K}$ satisfaisant (2.1), alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, pour tout $n \geq n_0$; et il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, pour tout $n \geq n_1$. Soit $m = \max(n_0, n_1)$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq m$. On a :

$$|\ell - \ell'| = |u_n - \ell - u_n + \ell'| \leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a ainsi établi que $|\ell - \ell'| < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. Ce qui implique que $\ell - \ell' = 0$, c'est-à-dire $\ell = \ell'$. □

Le Théorème 2.1, nous permet, lorsqu'une suite (u_n) est convergente, de dire que l'unique nombre ℓ qui satisfait la propriété (2.1) est **la limite** de la suite (u_n) et nous poserons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. On dira aussi que la suite (u_n) converge ou tend vers ℓ et on notera parfois $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Définition 2.5. On dit qu'une suite de $\mathbb{K}$ est divergente si elle est non convergente dans $\mathbb{K}$.

Exemple 2.1. Toute suite stationnaire (en particulier toute suite constante) est convergente.

Exemple 2.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = q^n$ avec $|q| < 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Existe-t-il $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_\varepsilon$, $|q^n| < \varepsilon$?

— Si $q = 0$, d'évidence on peut prendre $n_\varepsilon = 1$.

— Si $q \neq 0$, posons $|q| = \frac{1}{1+h}$, avec $h > 0$. En utlisant la formule du binôme, on peut montrer que $|q|^n < \frac{1}{nh}$. La propriété d'Archimède assure qu'on peut choisir n assez grand pour que $\frac{1}{nh} < \varepsilon$; d'où le résultat.

La convergence dans $\mathbb{C}$ se ramène à celle de deux suites réelles comme l'affirme la

Proposition 2.1. *Une suite (u_n) de nombres complexes converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si les suites réelles $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$.*

Exercice 2.1. Prouver la proposition précédente.

Théorème 2.2. *Toute suite convergente de $\mathbb{K}$ est bornée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente de $\mathbb{K}$. Notons ℓ sa limite. Il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < 1$. Quel que soit $n \geq n_0$, on a : $|u_n| \leq |\ell| + 1$. Soit s le plus grand élément de l'ensemble (fini) $\{|u_0|, \dots, |u_{n_0}|\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_n| \leq \max(s, |\ell| + 1)$. □

Proposition 2.2. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{K}$. On suppose que*

— *(u_n) converge vers 0 ;*

— *(v_n) est bornée.*

Alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Démonstration. Soit $M > 0$ tel que $|v_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$, $|u_n| = |u_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$. D'où $|u_n v_n - 0| = |u_n v_n| = |u_n||v_n| < \varepsilon$, pour tout $n \geq n_\varepsilon$. □

Exemple 2.3. $u_n = \frac{e^{in}}{n^2}$, $v_n = \frac{\cos(n^2+2n+1)}{n+2}$.

2.2 Opérations sur les limites de suites convergentes

Théorème 2.3. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes d'éléments de $\mathbb{K}$. On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{K}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \in \mathbb{K}$. Alors,*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \ell + \ell'$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda\ell$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$;
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = \ell\ell'$;
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$;
5. *si $\ell' \neq 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n \neq 0$ et on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\ell'}$;
6. *si $\ell' \neq 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n \neq 0$ et on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi.

1. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$, pour tout $n \geq n_1$ et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$, pour tout $n \geq n_2$. Il suit que pour tout $n \geq n_0 := \max(n_1, n_2)$, $|u_n + v_n - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda = 0$, alors la suite (λu_n) est nulle et converge donc vers $0 = \lambda\ell$. Supposons que $\lambda \neq 0$. Puisque (u_n) converge vers ℓ, il existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_3$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Dès lors, pour tout $n \geq n_3$, on a $|\lambda u_n - \lambda\ell| = |\lambda||u_n - \ell| < |\lambda| \times \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$. Donc (λu_n) converge vers $\lambda\ell$.
3. On peut écrire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n v_n - \ell\ell' = (u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')$. Les suites $(u_n - \ell)_n$ et $(v_n - \ell')_n$ convergent vers 0 et la suite $(v_n)_n$ est bornée donc chacune des suites $((u_n - \ell)v_n)_n$ et $(\ell(v_n - \ell'))_n$ converge vers 0 (d'après la Proposition 2.2) et donc $(u_n v_n - \ell\ell')_n$ converge vers 0.
4. La convergence de (u_n) vers ℓ implique l'existence de $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. Dès lors, pour tout $n \geq n_\varepsilon$ on a $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| < \varepsilon$; c'est-à-dire que $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.
5. Puisque $(|v_n|)$ converge vers $|\ell'|$, il existe un entier n_4 tel que, pour tour $n \geq n_4$, $|v_n| \geq \frac{|\ell'|}{2}$ (s'en convaincre). Pour tout $n \geq n_4$, on a : $\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| = \frac{|\ell' - v_n|}{|\ell' v_n|} \leq \frac{2}{|\ell'|^2}|\ell' - v_n|$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, il existe un entier n_5 tel que, pour tout $n \geq n_5$, $|v_n - \ell'| < \frac{|\ell'|^2\varepsilon}{2}$. Soit $N = \max(n_4, n_5)$. Pour tout $n \geq N$, on a : $\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| < \frac{2}{|\ell'|^2}\frac{|\ell'|^2\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell'}$.
6. Posons $w_n = \frac{1}{v_n}$, d'après l'assertion 5, la suite (w_n) converge vers $\ell'' = \frac{1}{\ell'}$. Maintenant, l'assertion 3 implique la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = (u_n w_n)$ converge vers $\ell\ell'' = \frac{\ell}{\ell'}$. $\square$

Nous allons maintenant prendre les limites dans $\overline{\mathbb{K}} = (\overline{\mathbb{R}}$ ou $\overline{\mathbb{C}})$.

Définition 2.6. On dit qu'une suite de nombres réels tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $n_\lambda \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\lambda$ on ait $u_n > \lambda$ (resp. $u_n < \lambda$).

Définition 2.7. Dans $\mathbb{C}$ nous dirons que la suite (z_n) converge vers ∞ (le point à l'infini) si la suite $(|z_n|)$ des modules des u_n converge vers $+\infty$.

2.3 Critère de Cauchy

Définition 2.8. On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ est de Cauchy si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ (n \geq n_\varepsilon,\ p \geq n_\varepsilon) \Rightarrow |u_n - u_p| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Proposition 2.3. *Toute suite de Cauchy de $\mathbb{K}$ est bornée.*

Démonstration. Si (u_n) est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$, alors pour $\varepsilon = 1$ il existe $n_1 > 0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $|u_n - u_{n_1}| < 1$. Comme $\Big||u_n| - |u_{n_1}|\Big| \leq |u_n - u_{n_1}|$, on a $\Big||u_n| - |u_{n_1}|\Big| < 1$, pour tout $n \geq n_1$; c'est-à-dire $-1 + |u_{n_1}| < |u_n| < |u_{n_1}| + 1$. Ce qui implique que $|u_n| \leq 1 + |u_{n_1}| = M$, c'est-à-dire que (u_n) est bornée à partir de n_1. D'après la Remarque 2.1 précédente, elle est bornée. □

Théorème 2.4. *Pour qu'une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ soit convergente il faut et il suffit qu'elle soit de Cauchy.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$ convergente vers $\ell \in \mathbb{K}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $n_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc pour tous $n \geq n_\varepsilon$ et $p \geq n_\varepsilon$ on a : $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|u_p - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite $|u_n - u_p| = |u_n - \ell - u_p + \ell| \leq |u_n - \ell| + |u_p - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Réciproquement soit (u_n) une suite de Cauchy. L'ensemble $B = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ de ses valeurs est borné. Il y a deux cas possibles.

1. Si B est une partie infinie de $\mathbb{K}$, alors comme B est borné, il admet, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (valable aussi pour $\mathbb{C}$), un point d'accumulation ℓ. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) est de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n \geq n_0$, $m \geq n_0$, $|u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme l'ensemble des entiers n tels que $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ est infini, il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que $|u_{n_1} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout entier $n \geq n_1$, on a alors : $|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{n_1}| + |u_{n_1} - \ell| < \varepsilon$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
2. Si B est un singleton $\{a\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$. Si maintenant B est une partie finie $\{a_1, \ldots, a_p\}$ de $\mathbb{K}$ avec $p>1$, soit $\varepsilon = \min\{|a_i - a_j|, 1 \leq i < j \leq p\}$. Comme (u_n) est de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$, $|u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soient donc $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$. Si u_n était différent de u_m, on aurait $|u_n - u_m| \geq \varepsilon$, ce qui contredirait le fait que $|u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi pour tout $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0}$. Il suit que (u_n) est stationnaire donc convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} = u_{n_0}$. □

Exemple 2.4. Montrons que la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente. Pour tout $n \geq 1$, on a $u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$. Comme $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+2} \geq \cdots \geq \frac{1}{2n}$, on a $u_{2n} - u_n \geq \underbrace{\dfrac{1}{2n} + \cdots + \dfrac{1}{2n}}_{n \text{ fois}}$; c'est-à-dire que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. Ainsi, si par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}$, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \geq n_0$ tels que $u_{2n} - u_n \geq \varepsilon$. Donc la suite (u_n) n'est pas de Cauchy : elle n'est pas convergente d'après le Théorème 2.4.

2.4 Valeurs d'adhérence - Sous-suites - limites supérieure et inférieure

2.4.1 Valeurs d'adhérence - Suites extraites

Définition 2.9. On dit que la suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ admet le nombre $x \in \mathbb{K}$ pour valeur d'adhérence si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de valeurs de n vérifiant $|u_n - x| < \varepsilon$.

Exemple 2.5.

1. La suite (u_n) donnée par $u_n = (-1)^n$ admet -1 et $+1$ pour valeurs d'adhérence.
2. La suite (u_n) donnée par $u_n = i^n + \frac{1}{n+1}$ admet -1, 1, i et $-i$ pour valeurs d'adhérence.

Remarque 2.2. Si une suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, alors ℓ est l'unique valeur d'adhérence de (u_n).

Définition 2.10. Soit (u_n) une suite d'élément de $\mathbb{K}$. On appelle suite extraite (ou sous-suite) de (u_n) toute suite (v_k) de la forme $v_k = u_{\varphi(k)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Si nous posons $\varphi(k) = n_k$, alors nous noterons (u_{n_k}) la suite $(u_{\varphi(k)})$. L'application φ est en fait une suite strictement croissante de nombres entiers naturels. Par conséquent, $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi(k) = \lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$.

Exemple 2.6. Soit $u_n = (-1)^n$. Les suites (v_n) et (w_n) définies par : $v_n = u_{2n} = 1$ et $w_n = u_{2n+1} = -1$ sont deux suites extraites de la suite (u_n).

Proposition 2.4. *Toute sous-suite d'une suite convergente dans $\overline{\mathbb{K}}$ est convergente vers la même limite.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$ convergente vers une limite $\ell \in \overline{\mathbb{K}}$ et soit (u_{n_k}) une suite extraite de (u_n).

— On suppose ℓ finie. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$, il existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_\varepsilon$ on ait $n_k \geq n_\varepsilon$ et par suite $|u_{n_k} - \ell| < \varepsilon$. D'où la suite (u_{n_k}) converge vers ℓ.

— Supposons à présent que ℓ est infinie ; pour fixer les idées supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $n_\lambda \in \mathbb{N}$ tel que, quel que soit $n \geq n_\lambda$, on a $u_n > \lambda$. Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$, il existe $k_\lambda \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_\lambda$ on ait $n_k > n_\lambda$ et par suite $u_{n_k} > \lambda$. Donc, $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{n_k} = +\infty$. Les autres cas se démontrent de la même façon. □

Proposition 2.5. *Pour qu'un élément $x \in \mathbb{K}$ soit une valeur d'adhérence d'une suite (u_n) il faut et il suffit qu'il existe une sous-suite (u_{n_k}) de (u_n) qui converge vers x dans $\mathbb{K}$.*

Exercice 2.2. Prouver la proposition.

Théorème 2.5. *Une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente si et seulement si toutes ses sous-suites sont convergentes et ont la même limite.*

Démonstration. Puisqu'une suite (u_n) est une suite extraite d'elle-même, il est évident que si toutes ses sous-suites convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ. Réciproquement supposons que la suite (u_n) soit convergente vers une limite ℓ, alors la Proposition 2.4 affirme que toute sous-suite de (u_n) converge vers ℓ. □

Théorème 2.6 (de Bolzano-Weierstrass). *De toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$ on peut extraire une suite convergente.*

Démonstration. Commençons d'abord par établir le résultat pour les suites réelles.

1. Soit (u_n) une suite réelle bornée.

(a) Si l'ensemble $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs de la suite est infini, alors il possède un point d'accumulation d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass vu au Chapitre 1 (Théorème 3.5). Soit ℓ un point d'accumulation de A. Il existe un entier n_1 tel que $|u_{n_1} - \ell| < 1$. Comme l'ensemble des entiers n tels que $|u_n - \ell| < \frac{1}{2}$ est infini, il existe un entier $n_2 > n_1$ tel que $|u_{n_2} - \ell| < \frac{1}{2}$. On peut ainsi construire une suite strictement croissante (n_k) d'entiers naturels tels que $|u_{n_k} - \ell| < \frac{1}{k}$. On a alors $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{n_k} = \ell$.

(b) Si $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ est un ensemble fini, il existe un élément ℓ de A et une infinité d'entiers n tels que $u_n = \ell$. On peut donc construire une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers telle que $u_{n_k} = \ell$, d'où $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{n_k} = \ell$.

2. Supposons à présent que (z_n) est une suite bornée de nombres complexes. Comme $|\mathrm{Re}(z_n)| \leq |z_n|$, la suite réelle $(\mathrm{Re}(z_n))$ est bornée ; on peut donc en extraire une suite $(\mathrm{Re}(z_{\varphi(n)}))$ convergente. Mais alors, la suite $(\mathrm{Im}(z_{\varphi(n)}))$ est bornée et on peut en extraire une suite $(\mathrm{Im}(z_{\phi\circ\varphi(n)}))$ qui converge. Dès lors, $(\mathrm{Re}(z_{\phi\circ\varphi(n)}))$ est une sous-suite de $(\mathrm{Re}(z_{\varphi(n)}))$ et est donc convergente. Ainsi, les deux suites $(\mathrm{Re}(z_{\phi\circ\psi(n)}))$ et $(\mathrm{Im}(z_{\phi\circ\psi(n)}))$ sont convergentes ; d'où le résultat. $\square$

Nous allons étendre à $\overline{\mathbb{R}}$ la notion de valeur d'adhérence en disant qu'une suite (u_n) de nombres réels admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour valeur d'adhérence si elle est non majorée (resp. non minorée).

Exemple 2.7. $+\infty$ et $-\infty$ sont des valeurs d'adhérence de la suite $u_n = (-1)^n n$.

2.4.2 Plus grande et plus petite limites d'une suite

Soit (u_n) une suite de réels. Par E nous désignerons l'ensemble des éléments $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tels qu'il existe une sous-suite (u_{n_k}) de (u_n) qui tend vers x.

Définition 2.11. Le nombre $u^+ = \sup E$ (resp. $u_- = \inf E$), s'il existe, est appelé la limite supérieure (resp. limite inférieure) ou bien la plus grande (resp. la plus petite) limite de la suite (u_n). On le désigne assez souvent par $\overline{\lim}\, u_n$ (resp. $\underline{\lim}\, u_n$) ou encore $\limsup u_n$ (resp. $\liminf u_n$).

Proposition 2.6. *Pour toute suite réelle (u_n), les limites $u^+ = \overline{\lim}\, u_n$ et $u_- = \underline{\lim}\, u_n$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. Nous allons montrer seulement l'existence de u^+. Pour une suite réelle (u_n), deux cas sont possibles : ou bien elle est majorée, ou bien non. Si la suite n'est pas majorée, alors $+\infty$ est une valeur d'adhérence et elle est la plus grande ($u^+ = +\infty$). Si (u_n) est majorée alors deux cas sont possibles :

a_1) l'ensemble A de ses valeurs d'adhérence finies est non vide ;

a_2) l'ensemble A de ses valeurs d'adhérence finies est vide.

Dans le cas a_1), puisque la suite (u_n) est majorée, l'ensemble A est majoré et donc admet une borne supérieure finie $b = \sup A$. Nous allons montrer que b est une valeur d'adhérence (finie), c'est-à-dire que $b \in A$. Si $b \notin A$, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ contienne un nombre fini d'éléments de (u_n) et par suite, aucun élément de (u_n) (pourquoi ?). Ce qui contredit la condition que $b = \sup A$ et donc $b \in A$ et $b = u^+$. Dans le cas de a_2), $\overline{\lim}\, u_n = -\infty$ et il n'existe qu'une seule valeur d'adhérence $-\infty = \overline{\lim}\, u_n$. $\square$

Proposition 2.7 (Caractérisation de u^+ et de u_-)**.** *Soit (u_n) une suite de réels. Alors,*

a) $u^+ \in E$,

b) si $s > u^+$, il existe $n_s \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_s$, on a $u_n < s$; de plus u^+ est le seul élément de $\overline{\mathbb{R}}$ possédant les propriétés a) et b) ;

a') $u_- \in E$;

b') si $s < u_-$, il existe $n_s \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_s$, on a $u_n > s$; de plus u_- est le seul élément de $\overline{\mathbb{R}}$ possédant les propriétés a') et b').

Proposition 2.8. *Soit (u_n) une suite réelle.*

a) La suite (u_n) converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $u^+ = u_-$.

b) Si la suite (u_n) contient une sous-suite (u_{n_k}) convergente, on a : $u_- \leq \lim\limits_{k\to+\infty} u_{n_k} \leq u^+$.

Démonstration. Prouvons a).

$\Rightarrow$) Supposons dans un premier temps que (u_n) converge vers $x \in \mathbb{R}$ alors x est une valeur d'adhérence de (u_n) et par suite $u_- \leq x \leq u^+$. D'après la caractérisation de u^+ et de u_- et les inégalités $x - \varepsilon < u_n < x + \varepsilon$ vraies pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout $n \geq n_\varepsilon$ on a : $u^+ \leq x + \varepsilon$ et $u_- \geq x - \varepsilon$; c'est-à-dire que $x - \varepsilon \leq u_- \leq u^+ \leq x + \varepsilon$. En vertu du caractère arbitraire de ε on obtient $x \leq u_- \leq u^+ \leq x$; c'est-à-dire $x = u_- = u^+$.

Si maintenant (u_n) tend vers ∞ alors (u_n) est non bornée supérieurement et donc $u^+ = x = u_- = +\infty$. De même, si (u_n) tend vers $-\infty$, alors (u_n) est non bornée inférieurement et par suite $u^+ = x = u_- = -\infty$.

$\Leftarrow$) Supposons $u^+ = u_-$.

— Si $u^+ = u_- = +\infty$ (resp. $-\infty$) alors $u_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$).

— Si $u^+ = u_- \in \mathbb{R}$, alors d'après la caractérisation de u^+ et de u_- : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $\forall n > n_0$, $u_- - \varepsilon < u_n < u^+ + \varepsilon$. Or $u_- - \varepsilon = u^+ - \varepsilon$ donc $u^+ - \varepsilon < u_n < u^+ + \varepsilon$, c'est-à-dire $u_n \to u^+ = u_-$.

L'assertion b) provient de la définition de u^+ et de u_-. $\square$

Exercice 2.3. Calculer $\sup\{u_k, k \geq n\}$, $\inf\{u_k, k \geq n\}$, $\overline{\lim}\, u_n$, $\underline{\lim}\, u_n$ pour chacune des suites (u_n) suivantes : $u_n = (-1)^n$, $u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$, $u_n = \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$, $u_n = n^{(-1)^n}$.

2.5 Suites équivalentes

Définition 2.12. On dit que deux suites (u_n) et (v_n) de $\mathbb{K}$ sont équivalentes s'il existe une suite (λ_n) de $\mathbb{K}$ tendant vers 1 telle que pour n assez grand, on ait $v_n = \lambda_n u_n$.

On peut poser $\lambda_n = 1+\varepsilon_n$, où la suite (ε_n) tend vers zéro. Si deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, on notera $v_n \simeq u_n$ ou $v_n \sim u_n$.

Exemple 2.8. La suite (v_n) définie par $v_n = \frac{n+i}{n^2}$ est équivalente à la suite (u_n) donnée par $u_n = \frac{1}{n}$. En effet, $v_n = \lambda_n u_n$, avec $\lambda_n = 1 + \frac{i}{n}$ et on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 1$.

Proposition 2.9.

1. *Si une suite (u_n) est convergente, toute suite (v_n) équivalente à (u_n) est convergente et a même limite que (u_n).*

2. *Réciproquement, si (u_n) et (v_n) sont deux suites de $\mathbb{K}$ convergeant vers la même limite finie, et si cette limite est non nulle, alors les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes.*

Définition 2.13. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles équivalentes qui tendent vers 0, on dit qu'elles sont deux infiniment petits équivalents.

Exemple 2.9. $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{n+1}{n^2}$ sont deux infiniment petits équivalents.

Définition 2.14. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites équivalentes qui tendent vers $\pm\infty$, on dit qu'elles sont des infiniment grands équivalents.

Exemple 2.10. $u_n = -n$ et $v_n = -\frac{n^2}{n+1}$ sont deux infiniment grands équivalents.

Proposition 2.10. *Soient (u_n), (v_n), (a_n) et (b_n) 4 suites de $\mathbb{K}$ telles que $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$. Alors,*

1. *$(u_n v_n)$ est convergente si et seulement si $(a_n b_n)$ est convergente et, le cas échéant, on a l'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n$;*
2. *en cas d'existence, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente si et seulement si $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ est convergente et, le cas échéant, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$.*

Définition 2.15. On dit qu'une suite (u_n) est périodique s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit le cas échéant que (u_n) est p-périodique et que p est une période de la suite.

Exemple 2.11.

1. La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est 2-périodique.
2. On rappelle qu'une des racines cubiques complexes de 1 est $j = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. La suite (v_n) définie par $v_n = (-j)^n$ est 6-périodique.

Exercice 2.4. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite périodique soit convergente.

Nous allons à présent introduire la notation suivante dite de Landau.

Définition 2.16. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que

1. (v_n) est asymptotiquement négligeable devant (u_n) ou que (v_n) est un "petit o" de (u_n) s'il existe une suite (ε_n) telle que $v_n = \varepsilon_n u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$; on écrit alors $v_n = o(u_n)$;
2. (v_n) est asymptotiquement dominée (ou bornée) par (u_n) ou que (v_n) est un "grand O" de (u_n) s'il existe une constante A telle que $|v_n| \leq A|u_n|$, pour n assez grand ; on note alors $v_n = O(u_n)$.

Dans le cas de deux suites complexes, on étend la définition précédente comme suit.

Définition 2.17. Soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes. On dit que

1. (v_n) est asymptotiquement négligeable devant (u_n) (ou un "petit o" de (u_n)) si $|v_n| = o(|u_n|)$.
2. On dit que (v_n) est asymptotiquement dominée (ou bornée) par (u_n) ou (v_n) est un "grand O" de (u_n) si $|v_n| = O(|u_n|)$.

Exemple 2.12.

1. $\ln n = o(n^2)$; $n^2 = o(e^n)$; $\frac{1+e^{in}}{n^2} = o(\frac{i}{n})$.

2. $n^2 + \ln n = O(n^2)$; $\sin \frac{1}{n} = O(\frac{1}{n})$.

2.6 Suites monotones, suites adjacentes et théorème de Cantor

Dans ce paragraphe nous ne considérons que des suites réelles, c'est-à-dire que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2.6.1 Suites positives

Proposition 2.11. *La limite d'une suite convergente de nombres réels positifs est positive ou nulle.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite réelle convergente telle que $u_n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et soit ℓ sa limite. Si on avait $\ell < 0$, il existerait un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$ on ait $|u_n - \ell| < -\ell$. Ce qui impliquerait que $2\ell < u_n < 0$. Ce qui est une contradiction avec l'hypothèse $u_n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Proposition 2.12. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes et vérifiant $u_n \leq v_n$ ne serait-ce qu'à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*

Démonstration. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' ; et vérifiant $u_n \leq v_n$, pour tout entier n supérieur ou égal à un certain rang n_0. Pour tout $n \geq n_0$, posons $w_n = v_n - u_n \geq 0$. D'après le Théorème 2.3, la suite (w_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell' - \ell$. D'autre part, la Proposition 2.11 implique $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n \geq 0$; c'est-à-dire que $\ell \leq \ell'$. □

Remarque 2.3. D'une manière générale, lorsqu'on passe aux limites, les inégalités strictes deviennent des inégalités larges : $(u_n < v_n) \Rightarrow (\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n)$. Par exemple, pour $n > 1$, on a $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$.

Proposition 2.13. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels tendant vers une <u>même limite</u> ℓ. Si une suite (z_n) vérifie pour n assez grand les inégalités $u_n \leqslant z_n \leqslant v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell$.*

Démonstration. Sans nuire à la généralité on peut supposer les inégalités $u_n \leqslant z_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit $n \geq n_1$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit $n \geq n_2$, $|v_n - \ell| < \varepsilon$. Par conséquent pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$ on a : pour tout $n \geq n_0$, $\ell - \varepsilon < u_n \leqslant z_n \leqslant v_n < \ell + \varepsilon$.
2. Si $\ell = \pm\infty$, on peut se fixer les idées en prenant $\ell = +\infty$. Dans ce cas, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $n_\lambda \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\lambda$, $u_n > \lambda$. Par suite, pour tout $n \geq n_\lambda$ on a $\lambda < u_n \leqslant z_n$. □

2.6.2 Suites monotones

Définition 2.18. Soit (u_n) une suite réelle.

1. (u_n) est dite croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
2. (u_n) est dite strictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
3. (u_n) est dite décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.
4. (u_n) est dite strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

5. (u_n) est dite monotone si elle croissante ou (exclusif) décroissante.
6. (u_n) est dite strictement monotone si elle strictement croissante ou strictement décroissante.
7. (u_n) est dite majorée s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. (u_n) est dite minorée s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.7. *Dans $\mathbb{R}$,*

a) toute suite croissante et majorée admet une limite finie et égale à sa borne supérieure ;

b) toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$;

c) toute suite décroissante et minorée admet une limite finie égale à sa borne inférieure ;

d) toute suite suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration.

a) Soit (u_n) une suite croissante, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si elle est majorée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ce qui revient à dire que $X = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majorée par M. S'il en est ainsi X admet une borne supérieure finie dans $\mathbb{R}$, soit $\ell = \sup X$. Par suite pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire $u_p \in X$) tel que $\ell - \varepsilon < u_p \leq \ell$. Or pour tout $n \geq p$ on a : $\ell - \varepsilon < u_p \leq u_n \leq \ell$ et donc $0 \leq \ell - u_n \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

b) Si (u_n) est non majorée, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > \lambda$ (sinon λ serait un majorant de la suite) et pour tout $n \geq p$ on a : $u_n \geq u_p > \lambda$; d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c) et d) La transformation $t \longrightarrow -t$ donne c) et d). □

2.6.3 Suites adjacentes, théorème de Cantor

Définition 2.19. Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si :

(i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème 2.8. *Deux suites réelles (u_n) et (v_n) adjacentes sont convergentes et ont la même limite. De plus on a : $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Observons d'abord que la condition (ii) entraîne que si (u_n) est convergente, (v_n) l'est aussi et les deux suites ont alors la même limite. Posant $w_n = v_n - u_n$, on a : $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$. Les inégalités $v_{n+1} - v_n \leq 0$ et $u_{n+1} - u_n \geq 0$ impliquent $w_{n+1} - w_n \leq 0$. Donc la suite (w_n) est décroissante. Comme (w_n) tend vers 0, d'après le Théorème 2.7, on a $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \inf_n w_n$, d'où $w_n \geq 0$. Il en résulte que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; d'où $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite (u_n) est croissante et majorée ; elle est donc convergente. □

On a l'énoncé équivalent suivant aussi connu sous le nom de théorème des segments emboîtés.

Théorème 2.9 (de Cantor)**.** *Soit (I_n) une suite décroissante d'intervalles fermés et bornés $I_n = [u_n, v_n]$ de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$) et dont la longueur $v_n - u_n$ tend vers 0. Alors ces intervalles ont un unique point commun ℓ qui est la limite commune des suites (u_n) et (v_n).*

Exercice 2.5. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que la suite (u_n) admet une limite que l'on notera s. (On ne demande pas de calculer la limite).
2. Montrer que $|s - u_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

2.7 Limites infinies - Formes indéterminées

Théorème 2.10. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles :*

1. *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$ *;*
2. *si (v_n) est bornée et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$ *;*
3. *si* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = +\infty$ *;*
4. *si* $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = -\infty$ *;*
5. *si* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = -\infty$ *;*
6. *si* $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = +\infty$ *;*
7. *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$ *;*
8. *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$ *;*
9. *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$ *;*
10. *si (v_n) bornée et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$.

Examinons maintenant, les exemples suivants.

Exemple 2.13.

1. Soient $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n}$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$.
2. Soient $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.
3. Soient $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = n$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ mais $(u_n v_n)$ n'a pas de limite.

Remarque 2.4. La leçon qui ressort des exemples précédents est qu'on ne peut rien dire de la limite de la suite $(u_n v_n)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. On ne peut, non plus rien dire la limite de la suite $(u_n + v_n)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. On dit alors qu'on est en présence de formes indéterminées.

2.8 Suites récurrentes

2.8.1 Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 2.20. Soit $r \in \mathbb{K}$. On appelle suite arithmétique de raison r toute suite (u_n) vérifiant :

$$u_{n+1} = u_n + r, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Définition 2.21. Soit $q \in \mathbb{K}$. On appelle suite géométrique de raison q toute suite (v_n) vérifiant :

$$v_{n+1} = qv_n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Exercice 2.6. Dans $\mathbb{K}$, soient (u_n) une suite arithmétique de raison r et (v_n) une suite géométrique de raison q. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Montrer que

1. $u_n = u_0 + nr$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;
2. $S_n = (n+1)u_0 + \dfrac{n(n+1)}{2}r$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;
3. $v_n = v_0 q^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;
4. si $q \neq 1$, $S'_n = v_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.8.2 Suites récurrentes affines du premier ordre à coefficients constants

Définition 2.22. On appelle suite récurrente affine du premier ordre à coefficients constants toute suite (u_n) de $\mathbb{K}$ qui vérifient la propriété suivante :

$$\exists \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 / u_{n+1} = au_n + b, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Pour une telle suite (u_n), calculons u_n en fonction de n.

1. Si $a = 1$, (u_n) est une suite arithmétique de raison b, donc $u_n = u_0 + nb$.
2. Si $a \neq 1$, soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + \lambda$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \lambda = au_n + b + \lambda = a(v_n - \lambda) + b + \lambda = av_n + [b + \lambda(1-a)].$$

En choisissant $\lambda = \frac{b}{a-1}$, on voit que (v_n) est une suite géométrique de raison a. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 a^n$; d'où,

$$u_n = a^n \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1}. \tag{2.6}$$

2.8.3 Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 2.23. On appelle suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants toute suite (u_n) de $\mathbb{K}$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\exists \ (a,b) \in \mathbb{K}^2 \ / \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{K}$. Notons $E_{a,b} = \{(u_n) \subset \mathbb{K} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.

Remarque 2.5. L'ensemble $E_{a,b}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

Soit (u_n) un élément de $E_{a,b}$. Calculons u_n en fonction de n. Regardons si $E_{a,b}$ contient des suites géométriques. Soit $r \in \mathbb{K}$; la suite géométrique (r^n) est dans $E_{a,b}$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$, c'est-à-dire : $r^2 - ar - b = 0$. On a la

Définition 2.24. L'équation $r^2 - ar - b = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{K}$, est appelée l'équation caractéristique des suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Notons $\Delta = a^2 + 4b$ le discriminant de cette équation.

— Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$, les suites (r_1^n) et (r_2^n) appartiennent à $E_{a,b}$; de plus pour tout élément (u_n) de $E_{a,b}$, il existe alors λ_1, λ_2 dans $\mathbb{K}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n. \tag{2.8}$$

En pratique, on calculera λ_1, λ_2 à partir de u_0 et u_1.

— Si l'équation caractéristique admet dans $\mathbb{K}$ une solution double $r_0 = \dfrac{a}{2}$, pour tout élément (u_n) de $E_{a,b}$, il existe alors λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{K}$ tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^n. \tag{2.9}$$

On calcule λ_1 et λ_2 à partir de u_0 et u_1.

— Dans le cas d'une suite réelle, si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées r et $\bar{r}$, il existe alors λ dans $\mathbb{K}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda r^n + \overline{\lambda r^n}. \tag{2.10}$$

On peut aussi transformer cette expression en notant $\lambda = \frac{A-iB}{2}$, $\rho = |r|$ et $\theta = \arg(r)$; on a alors :

$$u_n = \rho^n \Big(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta) \Big),\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Exemple 2.14 (Suites de Fibonocci)**.** Étudions la suite (ϕ_n) dite de Fibonacci et définie par :

$$\begin{cases} \phi_0 = 0,\ \phi_1 = 1, \\ \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n,\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

L'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ admet deux solutions réelles $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; il existe donc $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\phi_n = \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Comme $\phi_0 = 0$ et $\phi_1 = 1$, on a : $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$. Ce qui donne $\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Exemple 2.15. Calculons u_n sachant que $u_0 = 1$, $u_1 = i$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$. L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ admet une solution double $r_0 = 2$, il existe donc $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$u_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 n 2^{n-1},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_0 = 1$ et $u_1 = i$, on a $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = i - 2$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^n + 2^{n-1}(i-2)n.$$

Exemple 2.16. Calculer u_n sachant : $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$. L'équation caractéristique $r^2+2r+4 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $2j$ et $2\bar{j}$. Comme $|2j| = 2$ et $\arg(2j) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^n \left(A\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right).$$

Comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a $A = 0$ et $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$

2.8.4 Suites récurrentes générales

Soit à étudier la suite (u_n) donnée par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $f(I) \subset I$.

2.8.4.1 Convergence de la suite

1. Si $f(x) - x$ garde un signe constant sur I alors (u_n) est monotone et $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ permet de déterminer le sens de variation de (u_n).
   — Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle est convergente.
   — Si (u_n) est croissante et non majorée, alors elle est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   — Si (u_n) est décroissante et minorée, alors elle est convergente.
   — Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors elle est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. Si f est croissante, alors la suite (u_n) est monotone. On calcul explicitement u_1.
   (a) $u_0 \leq u_1$: on montre par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
      — Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle est convergente.
      — Si (u_n) est croissante et non majorée, alors elle est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   (b) $u_0 \geq u_1$: on montre par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
      — Si (u_n) est décroissante et minorée, alors elle est convergente.
      — Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors elle est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. Si f est décroissante, on introduit deux suites auxilliaires (a_n) et (b_n) données par $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$. On montre que

$$a_{n+1} = f \circ f(a_n) \text{ et } b_{n+1} = f \circ f(b_n). \tag{2.12}$$

   Par ailleurs, $f \circ f$ est croissante, on peut donc étudier le sens de variation de (a_n) et (b_n) et leur convergence comme dans 2..
   — Si (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (u_n) converge aussi vers ℓ.
   — Si (a_n) et (b_n) convergent vers des limites différentes, alors la suite (u_n) est divergente.
   — Si (a_n) ou (b_n) est divergente, alors la suite (u_n) est divergente.

2.8.4.2 Détermination de la limite en cas de convergence

On suppose dans cette sous-section qu'il est déjà établi que la suite (u_n) est convergente et on se propose de déterminer sa limite. Notons ℓ la limite de (u_n). Si la fonction f est continue, en passant à la limite de l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$; c'est-à-dire que ℓ est un point fixe de f.

1. On détermine les points fixes de f en résolvant l'équation $f(x) = x$;
2. On trouve un argument (signe, majoration, etc) pour désigner la limite ℓ de (u_n) parmi les points fixes de f.

Exercice 2.7 (Examen 2016-2017)**.** On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 1 + \frac{4}{v_n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $v_n \in [1, 5]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Déduire que les suites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
4. Déterminer les limites de chacune des suites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
5. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 2.8 (Examen 2017-2018)**.** On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = \frac{1}{2}$ et $v_{n+1} = -v_n^2 + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Sans utiliser la dérivation, montrer que la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 1$ est décroissante sur $[0, 1]$.
2. Montrer que $v_n \in [0, 1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que les suites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
4. Déduire que les suites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
5. Déterminer la limite de chacune des suites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
6. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

Théorème 2.11 (de Otto Stolz)**.** *Soit $(v_n)_n$ une suite de réelle strictement croissante (ne serait-ce qu'à partir d'un certain rang) tendant vers $+\infty$ et soit $(u_n)_n$ une suite de réelle donnée. Alors l'existence de la limite de $\left(\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}\right)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ entraîne celle de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ et, le cas échéant, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{2.13}$$

Démonstration. Sans nuire à la généralité nous allons supposer la stricte croissance de $(v_n)_n$ à partir des premiers termes.

1. Supposons l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

(a) Si $\ell \in \mathbb{R}$, nous avons : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ / $\forall n > n_\varepsilon$, $\left|\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} < \ell + \frac{\varepsilon}{2} \\ \\ \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{v_{n-1} - v_{n-2}} < \ell + \frac{\varepsilon}{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{n_\varepsilon+1} - u_{n_\varepsilon}}{v_{n_\varepsilon+1} - v_{n_\varepsilon}} < \ell + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Ce que l'on peut encore écrire :

$$\begin{cases} (v_n - v_{n-1})(\ell - \frac{\varepsilon}{2}) < u_n - u_{n-1} < (\ell + \frac{\varepsilon}{2})(v_n - v_{n-1}) \\ \\ (v_{n-1} - v_{n-2})(\ell - \frac{\varepsilon}{2}) < u_{n-1} - u_{n-2} < (\ell + \frac{\varepsilon}{2})(v_{n-1} - v_{n-2}) \\ \vdots \\ \vdots \\ (v_{n_\varepsilon+1} - v_{n_\varepsilon})(\ell - \frac{\varepsilon}{2}) < u_{n_\varepsilon+1} - u_{n_\varepsilon} < (\ell - \frac{\varepsilon}{2})(v_{n_\varepsilon+1} - v_\varepsilon) \end{cases}$$

En faisant la somme membre à membre on obtient

$$(\ell - \frac{\varepsilon}{2})(v_n - v_{n_\varepsilon}) < u_n - v_{n_\varepsilon} < (\ell + \frac{\varepsilon}{2})(v_n - v_{n_\varepsilon});$$

c'est-à-dire que : $\forall n > n_\varepsilon$, $\left|\frac{u_n - u_{n_\varepsilon}}{v_n - v_{n_\varepsilon}} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nous avons l'égalité facilement vérifiable :

$$\frac{u_n}{v_n} - \ell = \frac{u_{n_\varepsilon} - \ell v_{n_\varepsilon}}{v_n} + \left[1 - \frac{v_{n_\varepsilon}}{v_n}\right]\left[\frac{u_n - u_{n_\varepsilon}}{v_n - v_{n_\varepsilon}} - \ell\right]. \tag{2.14}$$

L'égalité (2.14) implique que

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \ell\right| \leq \left|\frac{u_{n_\varepsilon} - \ell v_{n_\varepsilon}}{v_n}\right| + \left|\frac{u_n - u_{n_\varepsilon}}{v_n - v_{n_\varepsilon}} - \ell\right|.$$

Puisque $u_{n_\varepsilon} - \ell v_{n_\varepsilon}$ est fini et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n_\varepsilon} - \ell v_{n_\varepsilon}}{v_n} = 0$. Ce qui implique qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > n_1$, $\frac{|u_{n_\varepsilon} - \ell v_{n_\varepsilon}|}{v_{n_\varepsilon}} < \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, pour tout $n > n_\varepsilon$, $\left|\frac{u_n - u_{n_\varepsilon}}{v_n - v_{n_\varepsilon}} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $n_2 = \sup(n_\varepsilon, n_1)$, alors : $\forall n > n_2$, $\left|\frac{u_n}{v_n} - \ell\right| < \varepsilon$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell$.

(b) Supposons maintenant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = +\infty$, par exemple : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geq n_0$,

$$u_n - u_{n-1} > v_n - v_{n-1} > 0 \tag{2.15}$$

$$u_{n-1} - u_{n-2} > v_{n-1} - v_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$u_{n_0+1} - u_{n_0} > v_{n_0+1} - v_{n_0}. \tag{2.16}$$

En faisant, la somme membre à membre, on obtient $u_n - u_{n_0} > v_n - v_{n_0}$; c'est-à-dire que $u_n > (u_{n_0} - v_{n_0}) + v_n$; d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Maintenant, (2.15) implique que la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang n_0 et donc on peut appliquer (a) à $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n - v_{n-1}}{u_n - u_{n-1}} = 0^+$ (fini) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0^+$. Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$. □

Topologie de la droite numérique $\mathbb{R}$

Sommaire

3.1 Intervalle, voisinage, ensembles ouvert et fermé

Définition 3.1. On appelle intervalle de $\mathbb{R}$, toute partie I de $\mathbb{R}$ qui contient tout élément compris entre deux quelconques de ses éléments. Précisément, un ensemble non vide I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si :

$$(x \in I, y \in I \text{ et } x \leq z \leq y) \Longrightarrow z \in I.$$

Exercice 3.1.

1. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Montrer que $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$: c'est l'intervalle fermé borné d'extrémités a et b.
2. Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$: c'est l'intervalle ouvert d'extrémités a et b.
3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$: c'est l'intervalle semi-ouvert à droite d'extrémités a et b.
4. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$: c'est l'intervalle semi-ouvert à gauche d'extrémités a et b.

Exercice 3.2. Soient a et b deux nombres rationnels tels que $a < b$. L'ensemble $I = \{x \in \mathbb{Q} : a \leq x \leq b\}$ est-il un intervalle de $\mathbb{R}$?

Définition 3.2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Un voisinage de x_0 est une partie V de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert contenant x. On note $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinage de x_0.

Exemple 3.1. $]0, 1[$ et $[0, 1]$ sont des voisinages de $\frac{1}{2}$ mais $[0, 1]$ n'est pas un voisinage de 1.

Théorème 3.1. *Soient $x \in \mathbb{R}$ et V une partie de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) V *est un voisinage de* x *;*

ii) il existe un nombre $\varepsilon > 0$ *tel que* $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset V$ *;*

iii) il existe un entier $n > 0$ *tel que* $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\subset V$.

Définition 3.3. Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que X est ouvert si X est vide ou X est un voisinage de chacun de ses points.
- On dit que X est fermé si le complémentaire $\complement_{\mathbb{R}} X$, de X dans $\mathbb{R}$, est ouvert.

Exemple 3.2.

- Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert ; les intervalles $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$ sont des ouverts.
- Tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé ; l'intervalle $[a, +\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ne sont pas des ouverts de $\mathbb{R}$.

Remarque 3.1. Ouvert n'est pas le contraire de fermé. Par exemple, $X = [0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

Théorème 3.2.

- *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*
- *Une union d'ouverts est un ouvert.*
- $\mathbb{R}$ *et* $\emptyset$ *sont à la fois ouverts et fermés.*
- *Une union finie de fermés est un fermé.*
- *Une intersection de fermés est un fermé.*

On a le résultat suivant appelé axiome de Cantor et connu également sous le nom de la **propriété des segments emboîtés**.

Théorème 3.3 (Axiome de Cantor). *Soit* $I_n = [a_n, b_n]$ *une suite décroissante d'intervalles fermés et bornés (c'est-à-dire* $I_{n+1} \subset I_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on dit aussi que les intervalles* I_n *sont emboîtés). Alors l'intersection* $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} : x \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$ *est un intervalle non vide.*

Démonstration. L'ensemble $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré par b_0 ; il possède donc une borne supérieure s. L'ensemble $\{b_n, n \in N\}$ est minoré par a_0 ; il possède donc une borne inférieure i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n \leq s \leq i \leq b_n$. Il en résulte que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ contient l'intervalle $[s, i]$, et est donc non vide. □

Remarque 3.2. Si on avait seulement considéré des intervalles I_n de $\mathbb{R}$ tels que $I_{n+1} \subset I_n$, l'intersection $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ pourrait être vide. Pour s'en convaincre, examinons l'exemple suivant.

Exemple 3.3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n =]0, \frac{1}{n}[$ et $J_n = [n, +\infty[$. Trouver l'ensemble A des réels x tels que $x \in I_n$, pour tout $n \geq 1$. Trouver l'ensemble B des réels x tels que $x \in J_n$, pour tout $n \geq 1$.

Exercice 3.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \sqrt{2} + \frac{1}{n}\}$. Peut-on appliquer à la famille $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'axiome de Cantor ? Justifier votre réponse. Expliciter l'ensemble $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Exercice 3.4. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{Q}$ tels que $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$. On pose $A_n = \{x \in \mathbb{Q} : a_n \leq x \leq b_n\}$. Que peut-on dire de l'ensemble de $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$? Justifier la réponse.

Exercice 3.5. Soit $(]a_n, b_n[)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'intervalles ouverts et bornés de $\mathbb{R}$. Expliquer pourquoi on peut avoir $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]a_n, b_n[= \emptyset$.

3.2 Intérieur, adhérence, ensemble dérivé, point isolé

Définition 3.4. Un point x_0 de $\mathbb{R}$ est dit intérieur à un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ s'il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 contenu dans X. L'ensemble des points interieurs à X est appelé l'intérieur de X et noté $\overset{\circ}{X}$.

Exemple 3.4. $\overset{\circ}{\overbrace{[0,1]}} =]0,1[$ et $\overset{\circ}{\overbrace{\{1,2\}}} = \emptyset$.

Définition 3.5. Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point adhérent à X, si tout voisinage de x_0 de rencontre X ; autrement dit : $\forall\, V \in \mathcal{V}(x_0),\, V \cap X \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérents à $X \subset \mathbb{R}$ est appelé l'adhérence (ou la fermeture ou la clôture) de X et est noté $\overline{X}$.

Exemple 3.5.

— Pour $X \subset \mathbb{R}$, chaque point de X est évidemment un point adhérent à X.

— Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Les points a et b sont adhérents à $]a,b[$. En effet, si $]\alpha,\beta[$ est un intervalle ouvert qui contient a, posons $c = \min(\beta, b)$. L'intervalle $]a,c[$ est non vide et est inclus dans $]\alpha,\beta[\cap]a,b[$. Ceci prouve que a est adhérent à $]a,b[$. On montre de la même manière que b est un point adhérent à $]a,b[$. Il suit donc que $\overline{]a,b[} = [a,b]$.

— Si $X =]0,1[\cup\{2\}, \frac{3}{2}$ n'est pas adhérent à X.

Théorème 3.4.

— *L'adhérence d'une partie X de $\mathbb{R}$ est le plus petit fermé contenant X.*

— *Une partie X de $\mathbb{R}$ est fermé si et seulement si $X = \overline{X}$.*

— *L'interieur d'une partie X de $\mathbb{R}$ est le plus grand ouvert contenu dans X.*

— *Une partie X de $\mathbb{R}$ est ouverte si et seulement si $X = \overset{\circ}{X}$.*

Proposition 3.1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit x un point de $\overline{\mathbb{R}}$. Le point x est un point adhérent à A s'il existe une suite (u_n) d'éléments de A qui tend vers x.*

Définition 3.6. Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de X si pour tout voisinage V de x_0, $(V \setminus \{x_0\}) \cap X \neq \emptyset$. L'ensemble des points d'accumulation de X est appelé l'ensemble dérivé de X et est noté X'.

Exemple 3.6.

a) Le nombre 1 est un point d'accumulation de $X =]0,1[$ et $X' = [0,1]$.

b) Le réel 2 n'est pas un point d'accumulation de $X =]0,1[\cup\{2\}$ et $X' = [0,1]$.

c) $\{0,1,2\}' = \emptyset$.

Remarque 3.3. Un point d'accumulation est un point adhérent, la réciproque est fausse.

Exercice 3.6. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel. Montrer que x_0 est un point d'accumulation de A si et seulement si tout voisinage de x_0 contient une infinité de points de A.

Remarque 3.4. Seuls les ensembles de nombres réels contenant une infinité d'éléments peuvent avoir des points d'accumulation. Toutefois, un ensemble infini (non borné) peut ne pas avoir de point d'accumulation dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels en est un exemple.

Proposition 3.2. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit x un point de $\overline{\mathbb{R}}$. Le point x est un point d'accumulation de A s'il existe une suite non stationnaire (u_n) d'éléments de A qui tend vers x.*

Exercice 3.7. Montrer que si un point x de $\mathbb{R}$, adhérent à une partie X de $\mathbb{R}$ n'est pas point d'accumulation de X, il appartient nécessairement à X.

Théorème 3.5 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute partie infinie et bornée B de $\mathbb{R}$ admet au moins un point d'accumulation.*

Démonstration. Puisque B est borné, il existe un intervalle $I_1 = [m, M]$ de $\mathbb{R}$ qui le contient. Considérons les intervalles $I_1' = \left[m, \dfrac{m+M}{2}\right]$ et $I_1'' = \left[\dfrac{m+M}{2}, M\right]$. Comme B est infini, l'un des intervalles I_1' ou I_1'' contient une infinité de points de B. Si I_1' contient un nombre infini de points de B, on pose $I_2 = I_1'$; dans le cas contraire, on pose $I_2 = I_1''$. Remarquons que si ℓ est la longueur de I_1, celle de I_2 est $\dfrac{\ell}{2}$. De la même manière que pour I_1, on peut découper I_2 en deux intervalles fermés I_2' et I_2'' de même longueur dont l'un au moins contient une infinité de points de B. On posera $I_3 = I_2'$ si I_2' contient une infinité de points de B, sinon on pose $I_3 = I_2''$. Remarquons que $I_3 \subset I_2 \subset I_1$ et que la longueur de I_3 est égale à la moitié de celle de I_2, c'est-à-dire $\dfrac{\ell}{2^2}$. Par récurrence, on construit ainsi une suite d'intervalles fermés emboîtés (I_n) de longueur $\dfrac{\ell}{2^{n-1}}$. D'après le théorème des segments emboîtés (axiome de Cantor), il existe un réel a qui appartient à chacun des intervalles I_n. Soit J un intervalle ouvert contenant a ; il existe un réel $r > 0$ tel que $]a-r, a+r[$ est inclus dans J. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier n tel que $\ell < 2^{n-1}r$. Si x est un point de l'intervalle I_n, alors $|x-a| < \dfrac{\ell}{2^{n-1}} < r$. Le point x appartient donc à $]a-r, a+r[$. Ainsi on a : $I_n \subset]a-r, a+r[\subset J$. Comme I_n contient une infinité de points de B, il en est de même de J. On a donc prouvé que tout intervalle ouvert contenant a contient une infinité de points de B. Par suite a est un point d'accumulation de B. □

Exercice 3.8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$. Prouver que l'ensemble $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ possède un point d'accumulation.

Exercice 3.9. Soit $B = \left\{\dfrac{x}{1+|x|}, x \in \mathbb{R}\right\}$.

1. Expliciter B.
2. Prouver que 1 et -1 sont des points d'accumulation de B.
3. Déterminer l'adhérence $\overline{B}$ de B.

Exercice 3.10. L'ensemble $A = \{n + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ admet-il un point d'accumulation ? (Justifier).

Exercice 3.11. Prouver que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
2. Si $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'intervalles fermés bornés emboîtés, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] \neq \emptyset$.
3. Toute partie infinie et bornée de $\mathbb{R}$ possède un point d'accumulation.

Définition 3.7. Un point $x \in \mathbb{R}$, adhérent à une partie X de $\mathbb{R}$ sans être point d'accumulation de X est dit point isolé de X.

Exemple 3.7. On considère l'ensemble $X = \{-1, 0, 1 + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Les points -1 et 0 sont des points isolés de X tandis que 1 est un point d'accumulation de X.

Proposition 3.3. *Si X_1 et X_2 sont deux parties de $\mathbb{R}$, nous avons les relations suivantes :*
- $\overline{X}_1 = X_1 \cup X_1'$;
- $(X_1 \cup X_2)' = X_1' \cup X_2'$, $\quad (X_1 \cap X_2)' \subset X_1' \cap X_2'$;
- $\overline{X_1 \cup X_2} = \overline{X}_1 \cup \overline{X}_2$, $\quad \overline{X_1 \cap X_2} \subset \overline{X}_1 \cap \overline{X}_2$;
- $\mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2 \subset \overset{\circ}{\overbrace{X_1 \cup X_2}}$, $\quad \mathring{X}_1 \cap \mathring{X}_2 = \overset{\circ}{\overbrace{X_1 \cap X_2}}$.

Définition 3.8. On appelle frontière d'une partie X de $\mathbb{R}$ l'adhérence de X privée de l'intérieur de X. On le note ∂X : $\partial X = \overline{X} \setminus \mathring{X}$.

Exemple 3.8. $\partial[0,1[= \{0,1\}$ et $\partial\{0,1,2\} = \{0,1,2\}$.

Définition 3.9. Dans $\overline{\mathbb{R}}$, on entend par voisinage de $+\infty$ tout ensemble $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ contenant un ensemble de la forme $]a,+\infty]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Par voisinage de $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, on entend tout ensemble $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ contenant un ensemble de la forme $[-\infty, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

3.3 Notion de densité

Définition 3.10. Un nombre réel est dit irrationnel lorsqu'il n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. L'ensemble des nombres irrationnels est donc $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Définition 3.11. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que A est *dense dans* $\mathbb{R}$ *si A rencontre tout intervalle ouvert $]a,b[$, avec $a < b$. Précisément, A est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tous réels a et b avec $a < b$, il existe $x \in A$ tel que $a < x < b$.*

Exemple 3.9. L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3.4. *Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On veut construire un nombre rationnel et un nombre irrationnel strictement compris entre a et b.

- On pose $x = \dfrac{1}{b-a} > 0$. L'ensemble $A := \{n \in \mathbb{N}/n > x\}$ est non vide car d'après la proporiété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \times 1 > x$. Comme A est une partie de $\mathbb{N}$, il admet un plus petit élément que nous notons q. De même le sous-ensemble $B := \{n \in \mathbb{Z}/n > aq\}$ de $\mathbb{Z}$ est non vide minoré, il admet donc un plus petit élément p. On a donc : $p - 1 \leq aq < p$ et $\dfrac{p}{q} - \dfrac{1}{q} \leq a < \dfrac{p}{q}$ (puisque $q > 0$). D'où, $a < \dfrac{p}{q} \leq a + \dfrac{1}{q} < a + \dfrac{1}{x} = b$ et $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
- De même en considérant les réels $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ et $\beta = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$, il existe un rationnel r tel que $\alpha < r < \beta$, c'est-à-dire $a < r\sqrt{2} < b$.
  (a) Si $r \neq 0$ alors $r\sqrt{2}$ est un irrationnel et on a : $a < r\sqrt{2} < b$.
  (b) Si $r = 0$ on prend l'intervalle $]\frac{a}{\sqrt{2}}, 0[$ qui est inclus dans l'intervalle $]\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}[$; $]\frac{a}{\sqrt{2}}, 0[$ contient un rationnel $r_1 \neq 0$. Dans ce cas on a $r_1\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $a < r_1\sqrt{2} < b$.

Corollaire 3.1. *Dans tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$, différent d'un singleton, il y a une infinité de nombres rationnels (et de nombres irrationnels).*

Proposition 3.5. *Tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$ différent d'un singleton et $\mathbb{R}$ lui même sont non dénombrables. Dès lors ils contiennent une infinité non dénombrable de nombres irrationnels.*

Proposition 3.6. *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si son adhérence $\overline{A}$ est égal à $\mathbb{R}$.*

Théorème 3.6. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est dense dans $\mathbb{R}$;*
2. *pour tout réel a, il existe une suite (u_n) de points de A qui converge vers a.*

Pour clore ce chapitre, traduisons la convergence d'une suite avec le langage des voisinages.

Proposition 3.7. *Pour qu'une suite (u_n) converge vers ℓ dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\overline{\mathbb{R}}$) il faut et il suffit que pour tout voisinage V_ℓ de ℓ il existe un entier n_{V_ℓ} tel que pour tout $n \geq n_{V_\ell}$, $u_n \in V_\ell$.*

Démonstration. Lorsque $\ell = \infty$, la proposition résulte de la définition de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \infty$ et de la définition de voisinage V_∞ de ∞. Supossons donc ℓ fini. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ est un voisinage de ℓ. La condition est donc suffisante. Inversement, Si V_ℓ est un voisinage quelconque de ℓ il existe un intervalle $]u, v[$ ouvert contenant ℓ et contenu dans V_ℓ (par exemple $\varepsilon = \inf(v - \ell, \ell - u)]$ tel que $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ soit dans V_ℓ). Or la convergence de (u_n) vers ℓ entraîne l'existence d'un entier n_ε tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$, pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et donc $u_n \in V_\ell$, pour tout $n \geq n_\varepsilon$, c'est-à-dire que la condition est nécessaire. $\square$

Limites et continuité d'une fonction réelle à variable réelle

Sommaire

On rappelle qu'une fonction réelle sur un ensemble X non vide est une application de X dans $\mathbb{R}$. Elle sera souvent notée $f : X \to \mathbb{R}$ ou $X \overset{f}{\longmapsto} \mathbb{R}$. Nous ne considérons ici que les fonctions définies sur des parties de $\mathbb{R}$, mais les limites sont définies dans $\overline{\mathbb{R}}$. On rappelle que $\bar{X}$ désigne l'adhérence de X dans $\mathbb{R}$.

4.1 Limites de fonctions

4.1.1 Définition par les voisinages

Définition 4.1. Soit f une fonction réelle définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérant à A. On dit que f admet une limite lorsque x tend vers a s'il existe un nombre réel ℓ tel que pour tout voisinage V_ℓ de ℓ il existe un voisinage U_a du point a tel que $f\Big((U_a \cap A) \setminus \{a\}\Big) \subset V_\ell$.

Proposition 4.1. *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$. Si f admet une limite en un point $a \in \overline{A}$, cette limite est unique.*

La Proposition 4.1 permet lorsque, pour une fonction $f : A \to \mathbb{R}$, un réelle ℓ vérifie la propriété de la Définition 4.1 de dire que ℓ est **la limite** de f en $a \in \bar{A}$. On écrit alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Définition 4.2. Soit f une fonction réelle définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \bar{A}$. On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si elle vérifie la propriété suivante : pour tout réel b, il existe un voisinage U_a du point a tel que $f\Big((U_a \cap A) \setminus \{a\}\Big) \subset]b, +\infty[$.

Définition 4.3. Soit f une fonction réelle définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \bar{A}$. On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si pour tout réel b, il existe un voisinage U_a du point a tel que $f\Big((U_a \cap A) \setminus \{a\}\Big) \subset]-\infty, b[$.

4.1.2 Définitions par la distance (langage $\varepsilon - \delta$)

Soient $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie non vide de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ adhérent à A et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. **Limite finie en un point fini.**

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \,/ \Big(x \in A \text{ et } |x-a| < \delta\Big) \Rightarrow \Big(|f(x)-\ell| < \varepsilon\Big)\right\}.$$

2. **Limite infinie en un point fini.**

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\lambda \in \mathbb{R}, \exists\delta > 0 \,/ \Big(x \in A \text{ et } |x-a| < \delta\Big) \Rightarrow \Big(f(x) > \lambda\Big)\right\}.$$

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\lambda \in \mathbb{R}, \exists\delta > 0 \,/ \Big(x \in A \text{ et } |x-a| < \delta\Big) \Rightarrow \Big(f(x) < \lambda\Big)\right\}.$$

3. **Limite finie en l'infini.**

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \ell\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha \in \mathbb{R} / \Big(x \in A \text{ et } x > \alpha\Big) \Rightarrow \Big(|f(x)-\ell| < \varepsilon\Big)\right\}.$$

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} \ell\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha \in \mathbb{R} / \Big(x \in A \text{ et } x < \alpha\Big) \Rightarrow \Big(|f(x)-\ell| < \varepsilon\Big)\right\}.$$

4. **Limite infinie en l'infini.**

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\lambda \in \mathbb{R}, \exists\alpha \in \mathbb{R} / \Big(x \in A \text{ et } x > \alpha\Big) \Rightarrow \Big(f(x) > \lambda\Big)\right\}.$$

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} -\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\lambda \in \mathbb{R}, \exists\alpha \in \mathbb{R} / \Big(x \in A \text{ et } x > \alpha\Big) \Rightarrow \Big(f(x) < \lambda\Big)\right\}.$$

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} +\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\lambda \in \mathbb{R}, \exists\alpha \in \mathbb{R} / \Big(x \in A \text{ et } x < \alpha\Big) \Rightarrow \Big(f(x) > \lambda\Big)\right\}.$$

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} -\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\lambda \in \mathbb{R}, \exists\alpha \in \mathbb{R} / \Big(x \in A \text{ et } x < \alpha\Big) \Rightarrow \Big(f(x) < \lambda\Big)\right\}.$$

4.1.3 Limite à droite - Limite à gauche

Définition 4.4. Soit f une fonction définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$ adhérant à A.

1. On dit que f admet une limite à gauche en a s'il existe un nombre réel ℓ tel que :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \,/ \Big(x \in A \text{ et } 0 < a - x < \delta\Big) \Rightarrow \Big(|f(x)-\ell| < \varepsilon\Big).$$

2. On dit que f admet une limite à droite en a s'il existe un nombre réel ℓ tel que :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \,/ \Big(x \in A \text{ et } 0 < x - a < \delta\Big) \Rightarrow \Big(|f(x)-\ell| < \varepsilon\Big).$$

Notations.

1. Si f admet ℓ comme limite à droite en a, on note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \ell$.
2. Si f admet ℓ comme limite à gauche en a, on note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \ell$.

Exemple 4.1. Pour la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$ on a $\lim\limits_{x\to 0^+} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} = -1$.

Théorème 4.1. *Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$. Une fonction $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ admet une limite en a si et seulement si elle admet une limite à droite en a et une limite à gauche en a et ces deux limites sont égales.*

Exercice 4.1. Prouver le Théorème 4.1.

Exercice 4.2. La fonction f suivante admet-elle une limite en 0 ? $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

Remarque 4.1. On peut regarder la limite de f en $+\infty$ [resp.$-\infty$] comme une limite à droite [resp. à gauche] lorsque cette limite existe.

4.1.4 Utilisation des suites pour étudier la limite d'une fonction

Proposition 4.2. *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$. Soit a un point adhérent à A. La fonction f admet une limite ℓ en a si et seulement si pour toute suite (u_n) de points de A tendant vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ.*

Démonstration. Pour simplifier nous supposerons a et ℓ finis.

Supposons que pour toute suite (u_n) de points de A tendant vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ. Si ℓ n'était pas la limite de f en a, on aurait l'existence d'un $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ on puisse trouver un $x = x(\delta)$ vérifiant $0 \leq |x-a| < \delta$ mais $|f(x)-\ell| \geqslant \varepsilon_0$. Soit $(\delta_n)_n$ une suite quelconque vérifiant $\delta_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$. Posons $x_n = x(\delta_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En vertu de la construction

$$0 \leq |x_n - a| < \delta_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{4.1}$$

et

$$|f(x_n) - \ell| \geqslant \varepsilon_0. \tag{4.2}$$

De (4.1) on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ et (4.2) signifie que ℓ ne peut pas être égale à $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$. Ce qui contredit le fait que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Supposons à présent que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $/\forall x \in A$, $(0 < |x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - \ell| < \varepsilon)$. Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé et $\delta = \delta(\varepsilon)$ choisi tel que pour tout $x \in A$ vérifiant $0 \leq |x-a| < \delta$ on ait $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de A tendant vers a il existe un entier n_ϵ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$, $|u_n - a| < \delta$. Donc, pour tout $n \geq n_\varepsilon$ on a : $|f(u_n) - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$. $\square$

De la Proposition 4.2 nous avons les résultats suivants tirés des propositions obtenues sur les suites.

Proposition 4.3. *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$. Si f admet une limite (finie) en un point a adhérent à A, alors il existe un voisinage ouvert V de a et un réel $M > 0$ tels que pour tout $x \in (V \setminus \{a\}) \cap A$, $|f(x)| \leq M$.*

Proposition 4.4. *Si une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ admet une limite $\ell \neq 0$ en un point $a \in \bar{A}$, il existe un voisinage ouvert V de a tel que pour tout $x \in (V \setminus \{a\}) \cap A$, $f(x) \neq 0$.*

4.1.5 Opérations algébriques sur les limites

Proposition 4.5. *Soient f et g deux fonctions numériques définies sur une même partie non vide A de $\mathbb{R}$ de limites respectives ℓ et ℓ' finies, en un point $a \in \bar{A}$, adhérence de A. Alors,*

1. $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = \ell + \ell'$;
2. $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda \ell$, *pour tout réel* λ ;
3. $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \ell \ell'$;
4. *si* $\ell' \neq 0$, *alors* $g(x) \neq 0$ *sur un certain voisinage de* a *et* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell}{\ell'}$;
5. $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\ell|$.

Cette proposition peut être étendue aux cas où ℓ et ℓ' ne seraient pas finies grâce aux conventions : $+\infty + (+\infty) = +\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$, $+\infty - (-\infty) = +\infty$, $b \times (+\infty) = sgn(b)\infty$, $b \times (-\infty) = -sgn(b)\infty$, $\frac{b}{\infty} = 0$ si $b \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.6. *Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, à l'exception peut-être de x_0, telle que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ et soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert W de centre a <u>privé du point a</u> et telle que $\lim\limits_{y \to a} g(y) = b \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $f(V_{x_0} \setminus \{x_0\}) \subset W$. Alors la fonction $h = g \circ f$ est définie sur $V_{x_0} \setminus \{x_0\}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = b$.*

Démonstration. Pour tout $x \in V_{x_0} \setminus \{x_0\}$ posons $y = f(x)$; alors $h(x) = g(y)$. Puisque $\lim\limits_{y \to a} g(y) = b$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : $(0 < |y - a| < \delta) \Rightarrow (|g(y) - b| < \varepsilon)$. Par suite $(0 < |f(x) - a| < \delta) \Rightarrow (|h(x) - b| < \varepsilon)$. Mais puisque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ et que quel que soit $x \in V_{x_0} \setminus \{x_0\}$ on a $f(x) \neq a$ (voir définition de W), alors on peut associer au nombre $\delta > 0$, un nombre $\alpha > 0$ tel que $0 < |x - x_0| < \alpha$ implique que $0 < |f(x) - a| < \delta$ et par suite $|h(x) - b| < \varepsilon$. □

Remarque 4.2. Attention, $(\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \text{ et } \lim\limits_{y \to b} g(y) = c) \not\Rightarrow (\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c)$!

Exemple 4.2. Soient $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto g(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases}$. On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = 1$, $g[f(x)] = 1$ si $x \neq \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{Z}^*$. Pourtant la fonction $x \mapsto g[f(x)]$ n'admet pas de limite en 0.

4.1.6 Limites de fonctions monotones

Définition 4.5. Une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est dite

— croissante si : $\forall x, y \in A$, $(y \leq x) \Rightarrow (f(y) \leq f(x))$;

— décroissante si : $\forall x, y \in A$, $(y \leq x) \Rightarrow (f(y) \geq f(x))$;

— monotone si elle est croissante ou décroissante (le "ou" étant exclusif) sur A ;

— strictement croissante si : $\forall x, y \in A$, $(y < x) \Rightarrow (f(y) < f(x))$;

— strictement décroissante si : $\forall x, y \in A$, $(y < x) \Rightarrow (f(y) > f(x))$;

— strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur A.

Théorème 4.2. *Soit f une fonction définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$.*

a) Si f est croissante, alors f admet une limite à gauche (finie ou égale à $+\infty$) en tout point $a \in \bar{A}$ où cette limite peut être définie ; si $a \in A$, cette limite est finie et vérifie $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \leq f(a)$. Si A est non majoré, f a une limite (finie ou égale à $+\infty$) en $+\infty$.

b) Si f est décroissante, alors f admet une limite à droite (finie ou égale à $-\infty$) en tout point $a \in \bar{A}$ où cette limite peut être définie ; si $a \in A$, cette limite est finie et vérifie $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \leq f(a)$. Si A est non minoré, f admet une limite (finie ou égale à $-\infty$) en $-\infty$.

Exemple 4.3. La fonction partie entière $E : x \longmapsto E(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x \to a^-} E(x) \leq E(a) = \lim\limits_{x \to a^+} E(x)$.

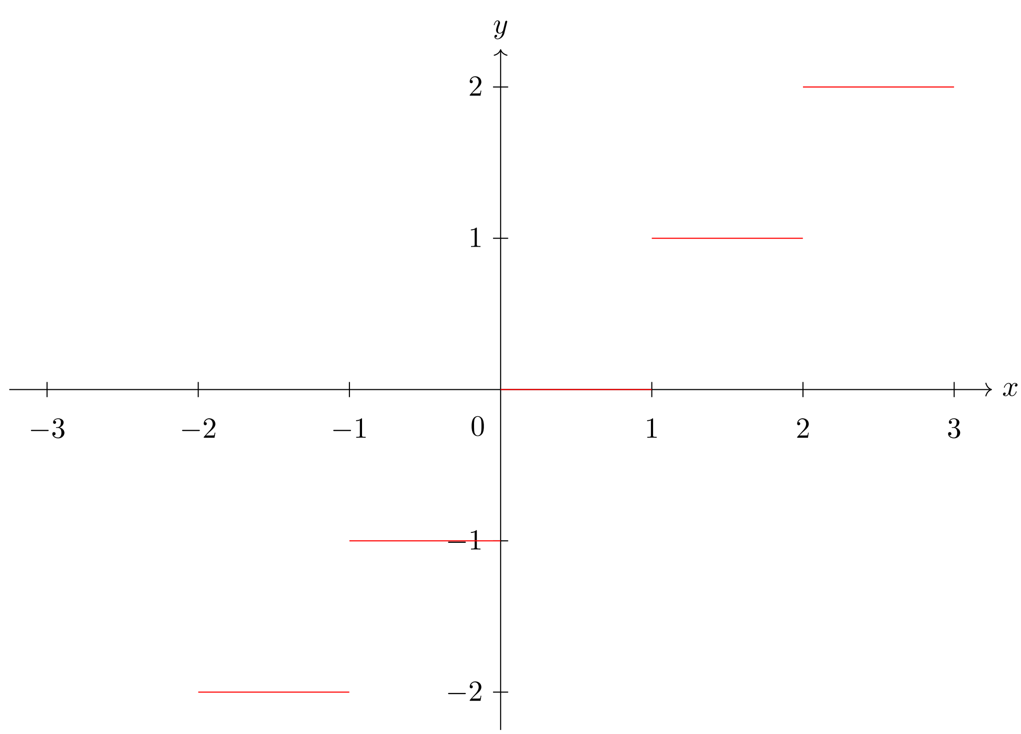


FIGURE 4.1 – Représentations graphiques de la fonction partie entière

4.2 Comparaisons locales de fonctions

4.2.1 Infiniment petits et infiniment grands

Définition 4.6. Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à A.

1. La fonction f est dite infiniment petite au voisinage de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.
2. La fonction f est dite infiniment grande au voisinage de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

Exemple 4.4.

1. $\left.\begin{array}{lll} a) & x \to \sin x, & x_0 = 0 \\ b) & x \to \dfrac{1}{x}, & x_0 = \pm\infty \end{array}\right\}$ sont des infiniment petits aux voisinages des points considérés.
2. $\left.\begin{array}{lll} a) & x \to \frac{\sin x}{x^2}, & x_0 = 0 \\ b) & x \to -x^2, & x_0 = \pm\infty \end{array}\right\}$ sont des infiniment grands au voisinage des points considérés.

4.2.2 Fonction dominée - Fonction négligeable

Définition 4.7. Soient f et g deux fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{A}$, peut-être infini.

1. On dit que f est dominée (ou bornée) par g ou que f est un "grand O" de g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V du point x_0 et une constante c tels que : $|f(x)| \leq c|g(x)|$, pour tout $x \in (V \cap A) \setminus \{x_0\}$. On écrit alors $f \underset{x_0}{=} O(g)$ ou par abus d'écriture $f(x) \underset{x \to x_0}{=} O(g(x))$.
2. On dit que f et g sont de même ordre au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si $f \underset{x_0}{=} O(g)$ et $g \underset{x_0}{=} O(f)$.

Exemple 4.5.

1. $\dfrac{1}{x} \underset{0}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ puisque $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ si $|x| \leq 1$.
2. $\dfrac{1}{x^2} \underset{\pm\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ puisque $\dfrac{1}{x^2} \leq 1 \times \dfrac{1}{|x|}$ pour $|x| \geq 1$.

Proposition 4.7. *Soient f et g deux fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à A et $g \neq 0$ sur A. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}^*$, alors f et g sont de même ordre.*

Démonstration. Remarquons d'abord que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ équivaut à l'existence d'une fonction α telle que $f(x) = b + \alpha(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$. En effet, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ alors il suffit de poser $\alpha(x) = f(x) - b$. Réciproquement, si $f(x) = b + \alpha(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Maintenant $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$ implique que $\frac{f(x)}{g(x)} = c + \alpha_1(x)$ et $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{c} + \alpha_2(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \alpha_i(x) \to 0$, $i = 1, 2$. Donc au voisinage de x_0, $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leq |c| + 1$ et $\left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right| \leq \dfrac{1}{|c|} + 1$. □

Définition 4.8. Soient f et g deux fonctions définies sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent de A. On dit que f est infiniment petit (ou négligeable) par rapport à g ou que f est un "petit o" de g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction ε telle que pour tout $x \in (A \cap V) \setminus \{x_0\}$ on a : $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. On écrit alors $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$.

Exemple 4.6. $\dfrac{x^2}{\sin x} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$ et aussi $\dfrac{x^2}{\sin x} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

4.2.3 Fonctions équivalentes

Définition 4.9. Soient f et g deux fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent de A. S'il existe une fonction φ définie dans un voisinage V du point x_0, à l'exception peut-être de x_0, telle que $f(x) = \varphi(x)g(x)$ dans $(V \cap A) \setminus \{x_0\}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$, on dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0. On écrit alors $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou par abus d'écriture $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.

Exemple 4.7. $(1 + x^4)x^2 \sim x^2$ au voisinage de 0 avec $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

Remarquons que si $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$ alors l'existence de $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ entraîne l'existence de $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$; et de plus on a l'égalité $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Notons avant de clore ce paragraphe que dans le calcul des limites on rencontre assez souvent les formes $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $+\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ appelées formes indertiminées. Selon les situations concrètes en présence, ces cas peuvent avoir tous les comportements possibles au point x_0. Déterminer la limite éventuelle associée à de telles formes est ce qu'on appelle lever l'indétermination.

4.3 Fonctions continues en un point

4.3.1 Définitions par les voisinages et par la distance

En langage des voisinages, on a la

Définition 4.10. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}$ et soit a un point de A. On dit que f est continue au point a si pour tout voisinage $V_{f(a)}$ de $f(a)$, il existe un voisinage U_a de a tel que $f(U_a \cap A) \subset V_{f(a)}$.

On peut aussi donner la définition suivante en langage "$\varepsilon - \delta$".

Définition 4.11. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}$ et soit a un point de A. On dit que f est continue au point a si : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in A, (|x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

S'il existe un voisinage U_a de a tel que $U_a \cap A = \{a\}$ c'est-à-dire si a est un point isolé de A, alors $f(U_a \cap A) \subset V_{f(a)}$, pour tout voisinage $V_{f(a)}$ de $f(a)$. D'où toute fonction f définie sur une partie $A \subset \mathbb{Z}$ est continue.

Si f n'est pas continue en un point a_0, on dit que f est discontinue au point a_0 ou que a_0 est un point de discontinuité de f.

Remarque 4.3. La continuité est une propriété locale. Par exemple, pour prouver qu'une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est continue en un point a de A, il suffit de trouver un intervalle ouvert I contenant a vérifiant la propriété suivante : il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout x de $I \cap A$, $|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|$. En effet si J est un intervalle de centre $f(a)$ et de longueur ε, pour que $f(x)$ appartienne à J, il suffit alors que $x \in A$ et $x \in]a - \frac{\varepsilon}{M}, a + \frac{\varepsilon}{M}[\cap I$.

4.3.2 Continuité à gauche - Continuité à droite - Prolongement par continuité

Définition 4.12. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et soit a un point de $\mathring{A}$.

1. On dit que f est continue à gauche en a si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ \forall x \in]a-\delta, a] \cap A,\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
2. On dit que f est continue à droite en a si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ \forall x \in [a, a+\delta[\cap A,\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Théorème 4.3. *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et soit a un point intérieur à A. Alors f est continue en a si et seulement elle est continue à droite et continue à gauche en a.*

Exercice 4.3. Prouver le théorème.

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \bar{A}$ (fini) tels que $\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$. La fonction f est discontinue en a dans les deux cas suivants :

— $a \notin A$,

— $a \in A$ mais $f(a) \neq b$.

On peut par contre construire une fonction $\tilde{f}$ assez proche de f continue au point a comme suit :

— dans le cas où $a \notin A$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ b & \text{si} \quad x = a \end{cases} \tag{4.3}$$

— dans le cas où $a \in A$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \setminus \{a\} \\ b & \text{si} \quad x = a \end{cases} \tag{4.4}$$

Définition 4.13. La fonction $\tilde{f}$ continue au point a définie par (4.3) ou par (4.4), selon le cas, est appelée le prolongement de f par continuité au point a.

Proposition 4.8. *Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $A \subset \mathbb{R}$ et continues au point $a \in A$; et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les fonctions αf, $f+g$, $f \cdot g$ sont continues au point a. Il en est de même de $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$.*

Pour la preuve se référer a la Proposition 4.5.

4.4 Fonction continue sur un intervalle

4.4.1 Continuité sur un intervalle - Extrema d'une fonction continue sur un intervalle

Définition 4.14. La fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est dite continue sur A si elle est continue en tout point de A.

Définition 4.15. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$.

1. On dit que f est majorée [resp. minorée, bornée] sur A, si $f(A)$ est une partie majorée [resp. minorée, bornée] de $\mathbb{R}$.
2. Si f est majorée [resp. minorée] sur A, la borne superieure [resp. borne inférieure] de $f(A)$ est appelée borne superieure [resp. borne inférieure] de f sur A et est notée $\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x)$ [resp. $\inf_A f = \inf_{x \in A} f(x)$].

Définition 4.16. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$.

1. On dit que f présente un maximum [resp. minimum] **absolu** en un point $a \in A$, si $f(x) \leq f(a)$ [resp. $f(x) \geq f(a)$], quel que soit $x \in A$; et ce maximum [resp. minimum] $f(a)$ est dit **strict** si les relations $x \in A$ et si $x \neq a$ entraînent l'inégalité stricte $f(x) < f(a)$ [resp. $f(x) > f(a)$].
2. On dit que f présente un maximum [resp. minimum] **relatif** au point $a \in A$, s'il existe un voisinage V de a tel que l'on ait $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$), pour tout $x \in V \cap A$.
3. Les maxima et les minima (absolus ou relatifs) sont appelés extréma de f.

Théorème 4.4. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Alors f est* **bornée** *sur $[a, b]$ et y atteint sa borne supérieure M et sa borne inférieure m.*

Démonstration. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

1. Supposons f non bornée sur $[a, b]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un point $x_n \in [a, b]$ vérifiant $|f(x_n)| \geq n$. De la suite bornée (x_n) le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'extraire une suite convergente (x_{n_k}) et le point $x = \lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k}$ appartient à $[a, b]$ (puisque $[a, b]$ est fermé). Puisque la fonction f est continue, la suite $(f(x_{n_k}))$ converge vers $f(x)$. Mais ceci entraîne une contradiction car la suite $(f(x_{n_k}))$ est non bornée. Donc f est bornée.
2. Puisque f est bornée, les bornes $M = \sup\limits_{[a,b]} f$ et $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ sont finies. Supposons que f ne prend pas la valeur M, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{M - f(x)}$ est définie et continue sur tout $[a, b]$. D'après la partie 1) de la démonstration, cette fonction est donc bornée. Il existe alors un nombre $\alpha > 0$ tel que $\left|\frac{1}{M - f(x)}\right| \leq \alpha$ c'est-à-dire $|M - f(x)| \geq \frac{1}{\alpha}$, pour tout $x \in [a, b]$. On a donc $M - f(x) \geq \frac{1}{\alpha}$ c'est-à-dire $f(x) \leq M - \frac{1}{\alpha}$, quel que soit $x \in [a, b]$. Donc M n'est pas la borne supérieure de f. Ce qui est inexact ; donc f atteint sa borne supérieure M.
3. On établit de même que f prend la valeur de m au moins en un point de $[a, b]$. □

Remarque 4.4. Le Théorème tombe en défaut pour une fonction continue sur un intervalle non fermé ou non borné. L'application $]0, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une bonne illustration.

4.4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.5 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction numérique continue sur un* **intervalle** *quelconque (ouvert, fermé, semi-ouvert, borné ou non) I de $\mathbb{R}$; et soient $M = \sup\limits_{I} f$ et $m = \inf\limits_{I} f$ les bornes de f sur I. Alors f prend toute valeur entre m et M.*

Démonstration. Si $m = M$ (cas où f est constante) le théorème est trivial. Supposons donc $m < M$ et soit y un nombre arbitraire tel que $m < y < M$. Les propriétés des bornes supérieure et inférieure entraînent l'existence des points $a, b \in I$ tels que $m \leq f(a) < y < f(b) \leq M$. Pour fixer les idées, supposons $a < b$.

L'ensemble $\mathcal{C} = \{x \in [a, b] \,/\, f(x) \leq y\}$ est non vide (puisqu'il contient a) et est majoré par b. Il admet donc une borne supérieure finie $c_0 < b$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, les propriétés de cette borne supérieure entraînent l'existence d'un élément $x_n \in \mathcal{C}$ vérifiant $c_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq c_0$. Par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = c_0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(c_0)$; et l'inégalité $f(x_n) \leq y$ (vraie par construction pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) entraîne par passage à la limite que $f(c_0) \leq y$. D'autre part, puisque c_0 est la borne supérieure de $\mathcal{C}$, on a $f(x) \geq y$ pour tout $x \in]c_0, b]$ (car $x > c_0$). Donc la limite à droite de f en c_0, qui est $f(c_0)$, vérifie $f(c_0) \geq y$. Il suit donc l'égalité $f(c_0) = y$. □

Remarque 4.5. Ce procédé utilisé nous permet d'avoir la plus grande racine de l'équation $f(x) = \gamma$.

Corollaire 4.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, s'il existe deux points a et b de I tel que $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution entre a et b.*

Corollaire 4.2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si f ne prend pas la valeur 0, alors f garde* **un signe constant** *sur I.*

Corollaire 4.3. *L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue, est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Démonstration.
- Si $m, M \in \mathbb{R}$, on a $]m, M[\subset f(I) \subset [m, M]$ alors $f(I)$ est égale à $[m, M]$, $]m, M[$, $[m, M[$ ou $]m, M]$.
- Si $m \in \mathbb{R}$ et $M = +\infty$, on a $]m, +\infty[\subset f(I) \subset]m, +\infty[$ et alors $f(I)$ est $]m, +\infty[$ ou $[m, +\infty[$.
- Si $m = -\infty$ et $M \in \mathbb{R}$, on a $]-\infty, M[\subset f(I) \subset]-\infty, M]$ et alors $f(I)$ est $]-\infty, M[$ ou $]-\infty, M]$.

Dans tous les cas, $f(I)$ est un intervalle. □

Le théorème suivant précise le résultat lorsque I est fermé et borné.

Théorème 4.6. *L'image d'un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle fermé et borné.*

4.4.3 Continuité et fonction strictement monotone sur un intervalle

Proposition 4.9.

a) Pour qu'une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ soit injective il faut et il suffit qu'elle soit strictement monotone.

b) Pour qu'une fonction numérique monotone sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ soit continue, il suffit que $f(I)$ soit un intervalle.

Proposition 4.10. *Soient I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b ($a < b$) et f une fonction strictement monotone et continue sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle de même nature que I d'extrémités $\alpha = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\beta = \lim\limits_{x \to b} f(x)$.*

Démonstration. Pour fixer les idées, supposons f strictement croissante. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires $f(A)$ est un intervalle d'extrémités α et β. Il est évident que $\alpha \in f(I)$ (resp. $\beta \in f(I)$) est équivalent à $a \in A$ (resp. $b \in A$), c'est-à-dire I et $f(I)$ sont de même nature. □

De la Proposition 4.6 résulte le théorème suivant.

Proposition 4.11. *Si f est une fonction continue au point x_0 et g une fonction continue au point $y_0 = f(x_0)$, alors la fonction $h = g \circ f$ est continue en x_0.*

Démonstration. Soit $z_0 = h(x_0) = g[f(x_0)] = g(y_0)$ et V_{z_0} un voisinage quelconque de z_0, alors $h^{-1}(V_{z_0}) = f^{-1}(g^{-1}(V_{z_0}))$. Puisque g est continue en y_0, alors $g^{-1}(V_{z_0})$ est un voisinage de y_0 et la continuité de f en x_0 entraîne que $f^{-1}(g^{-1}(V_{z_0}))$ est un voisinage de x_0. $\square$

4.5 Fonctions uniformément continues

Définition 4.17. Une fonction f définie sur $A \subset \mathbb{R}$ est dite uniformément continue sur A si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \,/\, \forall\, (x, y) \in A^2, (|x - y| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon). \tag{4.5}$$

Remarque 4.6.

a) $\delta = \delta(\varepsilon)$ dépend seulement de ε et pas du point.

b) Une fonction uniformément continue est nécessairement continue. En effet, si δ est le nombre associé à ε dans (4.5) et si x_0 est fixé dans A, alors pour tout $x \in A$ tel que $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Exemple 4.8.

a) La fonction $f : x \to |x|^{\frac{1}{2}}$ est uniformément continue sur $A = \mathbb{R}$. En effet soit $\varepsilon > 0$ et $\delta = \varepsilon^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|y - x| < \delta = \varepsilon^2$, on a $|f(x) - f(y)|^2 = \left| |x|^{\frac{1}{2}} - |y|^{\frac{1}{2}} \right|^2$. Or

$$\left(|x|^{\frac{1}{2}} - |y|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq \left| \left(|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}}\right) \left(|x|^{\frac{1}{2}} - |y|^{\frac{1}{2}}\right) \right| = \Big| |x| - |y| \Big| \leq |x - y| < \varepsilon^2$$

donc $\left| |x|^{\frac{1}{2}} - |y|^{\frac{1}{2}} \right| \leq \sqrt{|x - y|} < \varepsilon$.

b) La fonction $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur A, mais non uniformément. En effet, pour tout $x > 0$ et tout $\delta > 0$ tels que $0 < x + \delta < 1$, on a :

$$0 < f(x) - f(x + \delta) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \delta} = \frac{\delta}{x(x + \delta)}$$

et donc $f(x) - f(x + \delta) > \frac{\delta}{x(1+\delta)}$. Or $\frac{\delta}{x(1+\delta)} > \varepsilon \Leftrightarrow x < \frac{\delta}{\varepsilon(1+\delta)}$, donc pour tous $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, on peut toujours trouver $x < \frac{\delta}{\varepsilon(1+\delta)}$ tel que $f(x) - f(x + \delta) > \varepsilon$.

c) Soit $f : A = \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$. Considérons les points $x' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ et $x'' = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2\pi n}$. Prenons $\varepsilon = 1$, alors pour tout $\delta > 0$ on a : pour n assez grand, $|x' - x''| < \delta$ et

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right) \right| = 1 + 1 = 2 > 1.$$

Donc f est non uniformément continue.

d) Soit $f : A = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Pour tous $\varepsilon > 0$ et $\delta = \varepsilon$ on a :

$$\forall (x, y) \in A^2, (|x - y| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| = |x - y| < \varepsilon);$$

c'est-à-dire que f est uniformément continue.

Théorème 4.7 (de Heine)**.** *Toute fonction continue sur un compact $[a, b]$ y est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $\varepsilon > 0$. Supposons que f est non uniformément continue, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux points x_n et y_n de $[a,b]$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite (x_n) une suite (x_{n_k}) convergente. Notons ℓ sa limite. Puisque $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$, la suite (y_{n_k}) tend aussi vers ℓ. Maintenant puisque f est continue en ℓ, les suites $(f(x_{n_k}))$ et $(f(y_{n_k}))$ tendent vers vers $f(\ell)$. Par conséquent il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $|f(x_{n_k}) - f(\ell)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|f(y_{n_k}) - f(\ell)| < \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit l'inégalité $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon$ pour tout $k \geq k_0$, ce qui contredit l'hypothèse. $\square$

Définition 4.18. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est lipschitzienne s'il existe un réel $k > 0$ tel que : $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Exercice 4.4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Montrer que f est uniformément continue.

Dérivabilité d'une fonction réelle à variable réelle

Sommaire

La notion de dérivée d'une fonction en un point, issue du taux d'accroissement par passage à la limite lorsque l'accroissement sur la variable tend vers 0, donne une indication sur le comportement de $f(x) - f(a)$ lorsque x est prés de a. La notion de fonction dérivée permet ensuite d'étudier les variations locales et globales des fonctions d'une variable réelle, de déterminer des extrema.

5.1 Fonction dérivable - Nombre dérivée - Interprétation géométrique

5.1.1 Fonction dérivable, Nombre dérivé

Définition 5.1. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de A. On dit que f est dérivable au point x_0 si l'application $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie au point x_0. Le cas échéant, cette limite est appelée nombre dérivée de f au point x_0, et est notée $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$. Si f est dérivable en chaque point d'une partie D de A, on dit que f est dérivable sur D et l'application $f' : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f sur D.

Définition 5.2.

1. Soit f une fonction dont le domaine de définition contient $[x_0, x_1]$ avec $x_1 > x_0$. On dit que f est dérivable à droite en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite à droite en x_0. Le cas échéant, cette limite est appelée le nombre dérivé à droite de f en x_0 et on la noté $f'_d(x_0)$.
2. Soit f une fonction dont le domaine de définition contient $[x_1, x_0]$ avec $x_0 > x_1$. On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite à gauche en x_0. Le cas échéant, cette limite est appelée le nombre dérivé à gauche de f en x_0 et on la noté $f'_d(x_0)$.

Théorème 5.1. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dérivable au point x_0 intérieur à I si et seulement si les limites $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et sont égales.*

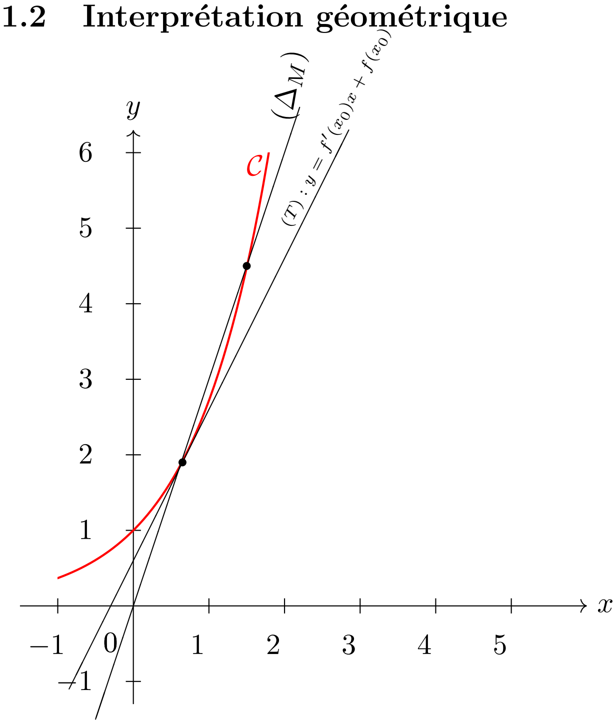
Exemple 5.1. Pour la fonction $f : x \mapsto |x|$, on a l'existence de $f'_d(0)$ et de $f'_g(0)$ mais pas celle de $f'(0)$.

Remarque 5.1. Par dérivabilité d'une fonction f sur un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on entend l'existence de $f'_d(a)$ et de $f'_g(b)$ en plus de celle de $f'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.

Théorème 5.2. *Si une fonction f est dérivable en un point x_0 alors f est continue en ce point.*

Démonstration. Par définition, $f'(x_0)$ est la limite, au point x_0 du rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : $(0 \leq |x-x_0| < \delta) \Rightarrow (|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)| < \varepsilon)$. Or, l'inégalité $|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)| < \varepsilon$ entraîne que $|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}| < \varepsilon + k$ avec $k = |f'(x_0)|$. Donc l'inégalité $|x-x_0| < \delta$ entraîne que $|f(x)-f(x_0)| \leq (k+\varepsilon)|x-x_0|$. Ce qui implique que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

5.1.2 Interprétation géométrique



Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et dérivable en un point x_0 de I. Soit $\mathcal{C}$ le graphe de f dans $I \times \mathbb{R}$. Si on considère un point $M = (x, f(x))$ du graphe $\mathcal{C}$ de f assez voisin de $A = (x_0, f(x_0))$, la droite Δ_M passant par A et M a pour équation

$$y = \frac{f(x) - f(x_0)}{t - x_0}(x - x_0) + f(x_0). \qquad (5.1)$$

Dire que f est dérivable en x_0 signifie que la pente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ de cette droite tend vers $f'(x_0)$ lorsque x tend vers x_0 ou encore que la droite (Δ_M) a pour position limite la droite (T) d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (5.2)$$

On dit que (T) est la tangente à $\mathcal{C}$ au point $(x_0, f(x_0))$.

Si f admet seulement une dérivée à droite au point x_0, la demi-droite (T_d) d'équation

$$\begin{cases} y = f(x_0) + (x - x_0)f'_d(x_0), \\ x \geq x_0 \end{cases}$$

est appelé la demi-tangente à droite à $\mathcal{C}$ au point $(x_0, f(x_0))$.

On définit de même la demi-tangente à gauche lorsque $f'_g(x_0)$ existe.

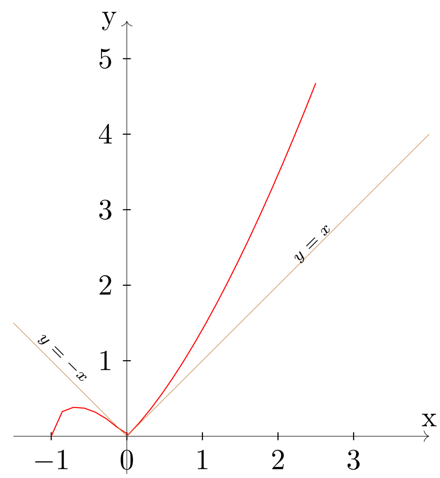
Exemple 5.2.

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x^3}$. Le domaine de définition de f est $\mathcal{D} = [-1, +\infty[$. On a : $f(x) = |x|\sqrt{1+x}$ et $f(0) = 0$.

— Sur $]0, \infty[$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sqrt{1+x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$.

— Sur $[-1, 0[$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\sqrt{1+x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$.

Donc, au point $x_0 = 0$, $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$. Les deux arcs qui aboutissent à l'origine sont respectivement tangente à la 1re et à la 2e bissectrice.



5.2 Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

Dans cette section, I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 est un élément de I.

Proposition 5.1 (Dérivée d'une combinaison linéaire)**.** *Soient f et g deux fonctions réelles définies sur I et dérivables en $x_0 \in I$. Pour tout $(\alpha, b) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $h = \alpha f + bg$ est dérivable en x_0 et on a :*

$$h'(x_0) = (\alpha f + bg)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + bg'(x_0). \tag{5.3}$$

Proposition 5.2 (Dérivée d'un produit)**.** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables au point $x_0 \in I$. Alors le produit $h = fg$ est dérivable au point x_0, et on a*

$$h'(x_0) = (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \tag{5.4}$$

Démonstration. On a :

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0).$$

Compte tenu de la dérivabilité de f et g en x_0 et de la continuité de f en x_0, on a : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Par suite, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$. □

Proposition 5.3 (Dérivée d'une fonction composée)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies respectivement sur les intervalles ouverts I et J de $\mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soit x_0 un point de I. On suppose que f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$. Alors $h = g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \tag{5.5}$$

Démonstration. La dérivabilité de f et de g respectivement aux points x_0 et $f(x_0)$ implique :

— $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_1(x)(x - x_0)$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$;

— $g(t) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))(t - f(x_0)) + \varepsilon_2(t)(t - f(x_0))$ avec $\lim\limits_{t\to f(x_0)} \varepsilon_2(t) = 0$.

On a ainsi

$$\begin{aligned} h(x)-h(x_0) &= g(f(x))-g(f(x_0)) \\ &= g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))+\varepsilon_2(f(x))(f(x)-f(x_0)) \\ &= g'(f(x_0))[f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon_1(x)(x-x_0)]+\varepsilon_2(f(x))\Big(f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon_1(x)(x-x_0)\Big). \end{aligned}$$

Il suit donc que

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0)+g'(f(x_0))\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(f(x))\Big(f'(x_0)+\varepsilon_1(x)\Big)$$

Puisque f est continue en x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$; et comme $\lim\limits_{t\to f(x_0)} \varepsilon_2(t)=0$, on a $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon_2(f(x))=0$. Il suit donc que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0)$. □

Proposition 5.4 (dérivée d'un rapport)**.** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $x_0 \in I$ avec $g(x_0) \neq 0$. Alors,*

1. *la fonction $h = \frac{1}{g} : x \mapsto \frac{1}{g(x)}$, définie sur un voisinage de x_0, est dérivable au point x_0 et on a*
$$h'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}; \tag{5.6}$$
2. *la fonction $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$, définie sur un voisinage de x_0, est dérivable au point x_0 et on a*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \tag{5.7}$$

Démonstration. Comme $g(x_0) \neq 0$ et g est continue en x_0, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap I$, $g(x) \neq 0$. Soit donc $x \in V$. On a :

$$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\frac{1}{g(x_0)g(x)}.$$

En passant à la limite lorsque x tend vers x_0, on obtient $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = -g'(x_0)\frac{1}{(g(x_0))^2} = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$. On obtient (5.7) en appliquant la Proposition 5.2 aux fonctions f et $\frac{1}{g}$. □

Proposition 5.5 (Dérivée d'une fonction réciproque)**.** *Soit f une application bijective et continue d'un intervalle I sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable au point x_0 de I et $f'(x_0) \neq 0$. Alors la réciproque $h = f^{-1}$ de f est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et on a :*

$$h'(y_0) = \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{5.8}$$

Démonstration. Soit $y \in J$ avec $y \neq y_0$; on a, en posant $x = h(y)$ et $x_0 = h(y_0)$,

$$\frac{h(y)-h(y_0)}{y-y_0} = \frac{x-x_0}{f(x)-(x_0)}.$$

Puisque f est injective, la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$ est définie pour $x \neq x_0$. On a $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \frac{1}{f'(x_0)}$ et nous savons d'autre part que h est continue. Le théorème des applications continues montre que

$$\lim_{\substack{y\to y_0 \\ y\in J\setminus\{y_0\}}} \frac{h(y)-h(y_0)}{y-y_0} = \lim_{\substack{y\to y_0 \\ y\in J\setminus\{y_0\}}} \varphi[h(y)] = \frac{1}{f'[h(y_0)]} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$ □

5.3 Théorèmes sur les valeurs moyennes

Théorème 5.3 (Fermat)**.** *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et admettant, en un point $t_0 \in \mathring{I}$ un extremum relatif (maximum ou minimum). Si la dérivée $f'(t_0)$ existe alors $f'(t_0) = 0$.*

Démonstration. Examinons le cas d'un maximum. Soit $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset I$, $f(t) \leq f(t_0)$. Alors pour tout $t \in]t_0 - \delta, t_0[$, $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \geq 0$ et par suite en passant à la limite on obtient $f'(t_0) \geq 0$. Maintenant pour $t \in]t_0, t_0 + \delta[$, $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \leq 0$; d'où $f'(t_0) \leq 0$. Le résultat est alors clair. □

Théorème 5.4 (Théorème des accroissements finis généralisés ou Théorème généralisé de la valeur moyenne)**.** *Soient f et g deux fonctions réelles continues sur un compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et dérivables sur l'ouvert $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c). \tag{5.9}$$

Démonstration. Posons $h(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t)$, $t \in [a, b]$. La fonction h est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)$. Nous allons vérifier qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

- Si $h = cte$ alors $h'(c) = 0$, pour tout $c \in]a, b[$.
- Si $h \neq cte$ alors puisque h atteint ses bornes il existe $t_0 \in]a, b[$ tel que $h(t_0) = \sup\limits_{[a,b]} h$ ou bien il existe $t_1 \in]a, b[$ tel que $h(t) = \inf\limits_{[a,b]} h$ et par suite $h'(t_0) = 0$ ou $h'(t_1) = 0$ d'après le théorème de Fermat. On peut dès lors prendre $c = t_0$ ou $c = t_1$. □

Corollaire 5.1 (Formule des accroissements finis ou théorème sur la valeur moyenne)**.** *Soit f une fonction numérique continue sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \tag{5.10}$$

Démonstration. Dans le Théorème 5.4, poser $g(t) = t$. □

Donnons une autre écriture de (5.10) comme suit : $a < c < b \Leftrightarrow 0 < (\frac{c-a}{b-a}) < 1$. Posons $\frac{c-a}{b-a} = \theta$, c'est-à-dire que $c - a = \theta(b - a)$ avec $\theta \in]0, 1[$. Si on pose $b = a + h$ alors la formule (5.10) prend la forme

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h) \text{ avec } 0 < \theta < 1. \tag{5.11}$$

Dans (5.10) si $f(a) = f(b)$ on a $f'(c) = 0$. On alors le

Théorème 5.5 (de Rolle)**.** *Soit f une fonction continue sur le fermé borné $[a, b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Interprétation géométrique. Ces propositions traduisent le même fait géométrique à savoir : si f est une fonction numérique continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (appelée "corde") joignant les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Corollaire 5.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I. Si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$, f est alors injective.*

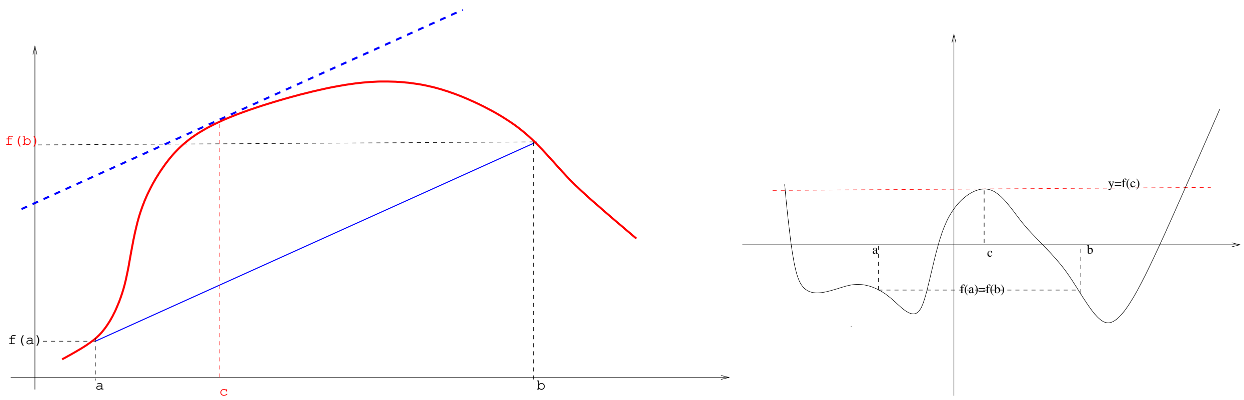


FIGURE 5.1 – Interprétation géométrique des théorèmes des accroissements finis et de Rolle

Corollaire 5.3 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a,b[$. On a alors $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$.*

Corollaire 5.4. *Soient f une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et f' admet une limite finie ℓ en x_0, alors f est dérivable en x_0 et on a $f'(x_0) = \ell$.*

Exercice 5.1. Prouver les deux résultats précédents.

5.4 Applications à l'étude des fonctions

Commençons par l'utilisation des dérivées pour déterminer la limite d'une fonction.

Théorème 5.6 (Règle de l'Hôpital ou de l'Hospital ou de Bernoulli)**.** *Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f et g deux fonctions continues, dérivables sur $]a,b[$ et vérifiant*

- *$g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$,*
- *$\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$.*

On suppose de plus que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$; ou $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Alors,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell. \tag{5.12}$$

Remarque 5.2. Il est important de noter les observations suivantes.

1. Une telle proposition reste vraie si $x \to b$ ou bien $g(x) \to -\infty$.
2. Attention ! La règle n'est utilisable que dans les situations d'indétermination du type $\frac{0}{0}$ ou dans le cas où la limite du dénominateur est infinie. Par exemple,
$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+2}{2x+1} = \frac{5}{3} \neq \frac{6}{2} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = \lim_{x\to 1} \frac{(3x^2+2)'}{(2x+1)'}.$$
3. La règle ne donne que des conditions suffisantes d'existence de la limite. Il existe des cas où la limite du quotient des dérivées n'existe pas et pourtant la limite du quotient des fonctions existe : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = 0$ alors que $\frac{2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})}{1}$ n'admet pas de limite en 0.

Exercice 5.2. Peut-on appliquer la règle de l'Hôpital pour déterminer la limite en $+\infty$ du rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$, où $f(x) = x + \cos(x)\sin(x)$ et $g(x) = e^{\sin(x)}[x + \cos(x)\sin(x)]$?

Proposition 5.6. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathring{I}$.*

1. *f est croissante au sens large sur I si et seulement si sa dérivée est positive ou nulle sur $\mathring{I}$;*
2. *f est décroissante au sens large sur I si et seulement si sa dérivée est négative ou nulle sur $\mathring{I}$;*
3. *f est constante si et seulement si sa dérivée est nulle sur $\mathring{I}$.*

Démonstration. Montrons que les conditions sont nécessaires. Soit $x_0 \in \mathring{I}$.

— Si f est croissante, alors pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, $f(x) - f(x_0)$ et $x - x_0$ sont de même signe et donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Comme f est dérivable en x_0, on a alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.

— Si f est décroissante, alors pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, $f(x) - f(x_0)$ et $x - x_0$ sont de signes contraires et donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Comme f est dérivable en x_0, on a alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$.

— Bien évidemment, si f est constante, le taux de variation de f est x_0 est nulle et donc $f'(x_0) = 0$.

Pour montrer que les conditions sont suffisantes, soient deux points u, v de I tels que $u < v$. La fonction f étant continue sur $[u, v]$ et dérivable sur $]u, v[$, il existe $c \in]u, v[$ tel que $f(v) - f(u) = (v - u)f'(c)$.

— Si $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathring{I}$, on a $f'(c) \geq 0$ et par suite $f(v) \geq f(u)$; donc f est croissante.

— Si $f'(t) \leq 0$ pour tout $t \in \mathring{I}$, on a $f'(c) \leq 0$ et par conséquent $f(v) \leq f(u)$; donc f est décroissante.

— Enfin si $f'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathring{I}$ on a $f'(c) = 0$ et alors $f(v) = f(u)$; et donc f est constante. $\square$

Si dans la démonstration qui précède, on suppose $f'(x) > 0$ [resp. $f'(x) < 0$] sur $\mathring{I}$, on a $f(v) > f(u)$ [resp. $f(v) < f(u)$]. Nous pouvons compléter par la

Proposition 5.7. *Pour qu'une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$ soit strictement croissante (resp. strictement décroissante) il* **suffit** *que sa dérivée soit* **strictement** *positive (resp.* **strictement** *négative) sur $\mathring{I}$.*

Remarque 5.3. Cette condition n'est pas nécessaire. En effet, l'application $t \mapsto t^3$ montre que la dérivée d'une fonction strictement croissante peut s'annuler.

Théorème 5.7 (Existence de fonctions réciproques). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$. Si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$, alors f réalise une bijection de I sur un intervalle J de même type que I. De plus la fonction f^{-1} est dérivable sur J et on a :*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}, \tag{5.13}$$

pour tout $y_0 \in J$. D'autre part, f et f^{-1} ont le même type de monotonie.

Démonstration. Posons $J = f(I)$. Comme f est continue, J est un intervalle d'après le Corollaire 4.3 du Chapitre 4. Supposons $f'(x) \neq 0$ pour tout x de $\mathring{I}$. D'après le Corollaire 5.2, f est injective et réalise donc une bijection de I sur $J = f(I)$. La monotonie de f entraîne que J est un intervalle de même type que I. De plus la fonction $f^{-1} : J \to I$ est continue d'après la Proposition **??** du Chapitre 4. Soient y_0 et y deux points de J. Posons $x = f^{-1}(y)$. Comme f^{-1} est continue, si y tend vers y_0, alors x tend vers $f^{-1}(y_0)$. Puisque $f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$, le Théorème 5.5 achève la preuve. $\square$

5.5 Formules de Taylor

5.5.1 Dérivées d'ordres supérieurs

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si la fonction f est dérivable sur I et sa fonction dérivée f' est dérivable au point x_0, on dit que f est dérivable à l'ordre 2 au point x_0. La dérivée de f' en x_0 est alors appelée la dérivée seconde de f en x_0 et est notée $f''(x_0)$ ou $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)$. Par itération, on définit la dérivée d'ordre $p > 2$ de f en x_0, notée $f^{(p)}(x_0)$ ou $\frac{d^pf}{dx^p}(x_0)$: c'est la dérivée au point x_0 (si elle existe) de l'application $x \mapsto f^{(p-1)}(x)$. Par convention $f^{(0)}(x) = f(x)$. Nous dirons qu'une fonction f est p fois dérivable (ou dérivable à l'ordre p) sur un intervalle quelconque I si, pour tout $x \in I$, le nombre dérivé $f^{(p)}(x)$ existe.

Remarque 5.4. L'existence de $f^p(x_0)$ exige l'existence de $f^{(p-1)}(x)$ dans un voisinage de x_0 et la continuité de $f^{(p-1)}$ au point x_0.

Définition 5.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit un point $x_0 \in I$.

1. On dit que f est continûment dérivable en x_0 si f est dérivable sur un voisinage de x_0 et si f' est continue en x_0.
2. On dit que f est continûment dérivable ou de classe C^1 sur I si f est continûment dérivable en tout point de I.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de *classe* C^p sur I si, la dérivée $f^{(p)}(x)$ existe en tout point de I et si l'application $x \mapsto f^{(p)}(x)$ est continue sur I. On écrit alors $f \in C^p(I)$. Si f est de classe C^p alors f est de classe C^k pour $0 \leq k \leq p$. Par fonction de classe C^0 on entendra une fonction continue.
4. On dit que f est de classe C^∞ si f admet des dérivées de tous les ordres (ces dérivées étant alors automatiquement continues).

Exemple 5.3.

1. Toute fonction polynomiale est de classe C^∞.
2. Toute fonction rationnelle est de classe C^∞ sur son domaine de définition.

Proposition 5.8. *Soient f et g deux fonctions dérivables jusqu'à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en un point x_0. Alors la fonction produit $f \cdot g$ est dérivable à l'ordre n en x_0 et on a la formule suivante dite de Leibniz :*

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{i=0}^{n} \complement_n^i f^{(n-i)}(x_0) g^{(i)}(x_0). \tag{5.14}$$

Exemple 5.4. Calculons la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction f définie par $f(x) = (3x^2 + 2x - 2)e^{4x}$.

5.5.2 Formule de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor-Lagrange fournit une évaluation globale d'une fonction sur un intervalle.

Théorème 5.8 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction réelle de classe C^n sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et admettant une dérivée d'ordre $n+1$ en tout point de $\mathring{I}$. Pour tous points a et b*

de I tels que $a < b$, il existe un point $c \in]a,b[$ tel qu'on ait la formule suivante dite de Taylor-Lagrange :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \tag{5.15}$$

Démonstration. Sous les hypothèses du théorème, soient $a, b \in I$ tels que $a<b$. Posons

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k. \tag{5.16}$$

Désignons par M_0 le nombre défini par l'égalité

$$f(b) = P_n(b) + M_0(b-a)^{n+1} \tag{5.17}$$

et soit g la fonction définie par

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - M_0(t-a)^{n+1}; \quad a \leq t \leq b. \tag{5.18}$$

Nous devons prouver qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $(n+1)!M_0 = f^{(n+1)}(c)$. Mais (5.16) et (5.18) entraînent :

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!M_0, \tag{5.19}$$

pour tout $t \in]a,b[$. Ainsi donc, la preuve sera achevée si l'on vérifie que $g^{(n+1)}(c) = 0$ pour un certain c entre a et b. On a :

— $P_n'(t) = f'(a) + f''(a)(t-a) + \frac{f^{(3)}(a)}{2!}(t-a)^2 + \frac{f^{(4}(a)}{3!}(t-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(t-a)^{n-1}$ donc $P_n'(a) = f'(a)$;

— $P_n''(t) = f''(a) + f'''(a)(t-a) + \frac{f^{(4)}(a)}{2!}(t-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(t-a)^{n-2}$ donc $P_n''(a) = f''(a)$;

— pour tout $k = 0, \ldots, n$, $P_n^{(k)}(t) = f^{(k)}(a) + \sum\limits_{i=k+1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-1)!}(t-a)^{i-1}$ donc $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$.

Il suit donc que $g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$, d'après (5.18). On a aussi $g(b) = 0$ d'après le choix de M_0 (voir (5.17)). Le théorème de Rolle nous donne l'existence de $c_1 \in]a,b[$ tel que $g'(c_1) = 0$, et puisque $g'(a) = 0$ alors il existe $c_2 \in]a, c_1[$ tel que $g''(c_2) = 0$. Après $n+1$ opérations nous aboutissons à l'existence d'un certain $c_{n+1} \in]a, c_n[$ tel que $g^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0$. Il suffit donc de prendre $c = c_{n+1} \in]a,b[$. □

Remarque 5.5.

1. Pour $n = 0$ on a la formule des accroissements finis.
2. Ce théorème montre que f peut être approchée par un polynôme de degré n. L'égalité (5.15) permet d'évaluer l'écart d'erreur si l'on connaît une valeur majorante de $|f^{(n+1)}(t)|$ sur $]a,b[$.

En remplaçant b par $a+t$ on peut écrire (5.15) sous la forme

$$f(a+t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}t^k + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta t); \quad 0 < \theta < 1. \tag{5.20}$$

Dans (5.15) ou (5.20) la formule obtenue dans le cas particulier où $a = 0$ est dite formule de Mac-Laurin :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}b^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}b^{n+1}. \tag{5.21}$$

ou

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta t); \quad 0 < \theta < 1. \tag{5.22}$$

Corollaire 5.5. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}. En posant $M = \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$, on obtient l'inégalité de Lagrange :*

$$\left| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \tag{5.23}$$

5.5.3 Formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young n'a qu'un caractère local. Elle ne pourra donc être utile que pour résoudre des problèmes locaux. Par exemple, on peut s'en servir dans :

— la détermination de limites ;

— l'étude de la position de la courbe représentative d'une fonction au voisinage d'un point par rapport à sa tangente en ce point.

Théorème 5.9 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I. On suppose que f est dérivable jusqu'à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en a, c'est-à-dire que $f'(a)$, $f''(a)$,..., $f^{(n)}(a)$ existent. Alors on a la formule suivante dite de Taylor-Young :*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k + (t-a)^n \varphi(t), \tag{5.24}$$

pour tout $t \in I$; avec $\lim_{t\to a} \varphi(t) = 0$.

Démonstration. Soit t un point de $I \setminus \{a\}$. On suppose sans perte de généralité que $a < t$. Soit toujours $g(t) = f(t) - P_{n-1}(t) - M_0(t-a)^n$ comme dans (5.18), où M_0 peut être choisi comme on veut. On a

$$g^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a) - M_0 n!(t-a).$$

La fonction $g^{(n-1)}$ prend la valeur 0 en un certain $c = c_{n-1} \in]a,t[$ (voir la preuve du Théorème 5.8) et donc $\dfrac{f^{(n-1)}(c) - f^{(n-1)}(a)}{c-a} = n!M_0$. Pour tout t, on peut choisir M_0 telle que $g(t) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(t) = P_{n-1}(t) - M_0(t-a)^n$. Alors à tout t est associée une constante $M_0(t)$ et ainsi est définie une fonction $t \mapsto M_0(t)$. Puisque $c \in]a,t[$ alors $\lim_{t\to a} c = a$ et en vertu de la dérivabilité de $f^{(n-1)}$ en a on a :

$$f^{(n)}(a) = \lim_{t\to a} \frac{f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a)}{t-a} = \lim_{c\to a} \frac{f^{(n-1)}(c) - f^{(n-1)}(a)}{c-a} = \lim_{t\to a} M_0(t) n!.$$

Il suit donc que $M_0(t)n! = f^{(n)}(a) + \gamma(t)$ avec $\lim_{t\to a} \gamma(t) = 0$. On obtient alors la formule suivante en remplaçant $M_0(t)$ et $P(t)$ dans l'expression $g(t) = f(t) - P_{n-1}(t) - M_0(t-a)^n$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k + \frac{\left[f^{(n)}(a) + \gamma(t)\right]}{n!}(t-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k + (t-a)^n \frac{\gamma(t)}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k + (t-a)^n \varphi(t), \end{aligned} \tag{5.25}$$

où $\varphi(t) = \dfrac{\gamma(t)}{n!}$. □

Si h est un nombre réel tel que $a+h \in I$ et si on pose $t = a+h$, la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + h^n \varphi(h), \tag{5.26}$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.

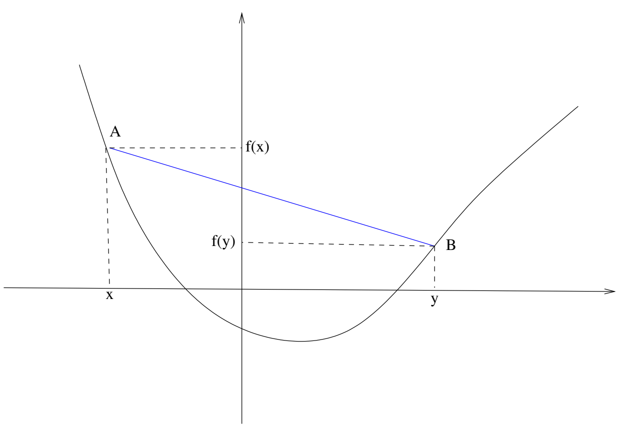
5.6 Fonctions convexes - Fonctions concaves

Définition 5.4. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite convexe, si pour tous $x, y \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ tels que $\lambda + \mu = 1$, on a l'inégalité :

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(x). \tag{5.27}$$

On peut encore dire que $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tous $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$f\Big(\lambda x + (1-\lambda) y\Big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \tag{5.28}$$



Interprétation géométrique. Les points x et y étant fixés et λ, μ assujettis aux conditions $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ et $\lambda+\mu = 1$, le point $M = \Big((\lambda x+\mu y), \lambda f(x)+\mu f(x)\Big)$ décrit le segment joignant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ du graphe de f. Donc, que f soit convexe signifie que le graphe de sa restriction à tout intervalle $[x, y]$ de I est situé en dessous de la corde joignant les points $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$.

Exemple 5.5.

1. Toute fonction affine est convexe.
2. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe.

Proposition 5.9. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction $\Delta_a f : x \mapsto= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.*

Démonstration.

$\Rightarrow$) Supposons f convexe sur I et prenons a un point arbitraire de I.

— Si $x < y < a$, alors nous posons $\lambda = \frac{a-y}{a-x}$ et donc $1-\lambda = \dfrac{y-x}{a-x}$. On a alors $\lambda \in [0,1]$ et

$$f(y) = f(a+y-a) = f\Big(a + \lambda(x-a)\Big) = f\Big((1-\lambda)a + \lambda x\Big) \leq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(x),$$

c'est-à-dire que $\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ou encore $(\Delta_a f)(y) \geq (\Delta_a f)(x)$.

— Si $a < x < y$, le procédé est le même.

— Si $x < a < y$, alors d'après ce que nous venons de trouver on a : $\frac{f(a)-f(y)}{a-y} \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, ou encore $(y-x)[f(a)-f(y)] \leq (a-y)[f(x)-f(y)] = (a-y)[f(y)-f(a)] + (a-y)[f(a)-f(x)]$. Ce qui implique que $[f(a)-f(y)](a-x) \leq (a-y)[f(a)-f(x)]$. D'où, $\frac{f(a)-f(y)}{a-y} \geq \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$.

$\Leftarrow$) Supposons maintenant que pour tout $a \in I$, $\Delta_a f$ soit croissant sur $I \setminus \{a\}$. Nous devons prouver que $f\Big((1-\lambda)x + \lambda y\Big) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(x)$ pour tout $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$.

— Si $x = y$ ou $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, l'inégalité est triviale. C'est pourquoi il nous faut seulement la prouver pour $x \neq y$ et $\lambda \in]0,1[$.

— Si $x < y$ et $\lambda \in]0,1[$ on a : $x + \lambda(y-x) < y$ et dans ce cas $(\Delta_x f)(x + \lambda(y-x) \leq (\Delta_x f)(y)$ pour tout $y \in I$ tel que $x < y$; c'est-à-dire $\frac{[(1-\lambda)x+\lambda y]-f(x)}{\lambda(y-x)} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. D'où les inégalités $f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

— Si $x > y$ et $\lambda \in]0,1[$ nous posons $\mu = 1-\lambda \in]0,1[$ et ce que nous venons de montrer donne

$$f\Big((1-\lambda)x + \lambda y\Big) = f[(1-\mu)y + \mu x] \leq (1-\mu)f(y) + \mu f(x) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y). \quad \square$$

Remarque 5.6. $(\Delta_a f)(x) = (\Delta_x f)(a)$.

Proposition 5.10. *Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, f est continue en tout point a intérieur à I et $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et vérifient $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.*

Démonstration. Soit $a \in \mathring{I}$. L'existence des limites en question et l'inégalité $f'_g(a) \leq f'_d(a)$ sont une conséquence de la croissance de $\Delta_a f$ et des propriétés des fonctions croissantes. D'autre part, en passant à la limite lorsque x tend vers a, on a : $\lim\limits_{x \to a^-} [f(x) - f(a)] = \lim\limits_{x \to a^-} (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0 \times f'_g(a) = 0$. De même, $\lim\limits_{x \to a_+} [f(x) - f(a)] = 0$. D'où f continue en a. $\square$

Remarque 5.7. Ce résultat ci-dessus n'est pas vrai si a n'est pas intérieur. Prenons $I = [0,1]$ et $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \neq 0$. La fonction f est convexe sur $[0,1]$ mais n'est pas continue en 0.

Proposition 5.11. *Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si a et b sont deux points de I tels que $a < b$, et $f'_d(a)$ et $f'_g(b)$ existent (c'est le cas si a et b sont intérieurs) alors,*

$$f'_d(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b). \tag{5.29}$$

Démonstration. Si $a < x < b$, avec $a, b \in \mathring{I}$, on a : $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$. En faisant tendre x vers a et b on obtient $f'_d(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b)$. $\square$

Proposition 5.12. *Pour qu'une fonction f, continue sur un intervalle <u>ouvert</u> I soit convexe il faut et il suffit qu'elle admette sur I une dérivée à droite (respectivement à gauche) croissante.*

Ces résultats nous permettent d'obtenir la

Proposition 5.13. *Pour qu'une fonction f, définie sur un intervalle ouvert I et admettant sur I une dérivée seconde, soit convexe, il faut et il suffit que l'on ait $f''(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$. Le graphe de f est alors situé au dessus de ses tangentes.*

Proposition 5.14 (Caractérisation des fonctions convexes dérivables)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en chaque point de I. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est convexe sur I ;*
2. *pour tous $x, y \in I$ on a : $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$;*
3. *f' est croissante sur I.*

Démonstration. Nous allons utilisé le cheminement suivant : $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$. Puisque f est dérivable en chaque point de I on a : $f'_g(x) = f'_d(x) = f'(x)$, pour tout $x \in I$. La Proposition 5.11 donne l'implication $1 \Rightarrow 2$. La caractérisation de la convexité en termes de $\Delta_a f$ et de la croissance d'une fonction dérivable donne l'implication $3 \Rightarrow 1$. Reste à montrer que $2 \Rightarrow 3$. En vertu de l'hypothèse 2, on a pour tous $x, y \in I$: $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$ et $f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$. Ce qui implique que $f'(x)(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq f'(y)(y - x)$ et par suite $(y - x)[f'(y) - f'(x)] \geq 0$. □

Définition 5.5. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite concave si la fonction $-f$ est convexe sur I.

On dit que le graphe d'une fonction convexe [respectivement concave] tourne sa concavité vers le haut [respectivement vers le bas]. Le sens de la concavité donne une information utile lorsqu'on construit des graphes de fonctions numériques. Si la fonction étudiée f est de classe C^2, le sens de la concavité est fourni par le signe de $f''(x)$. On dit que le point $(x, f(x))$ est un point d'inflexion du graphe de f si on a $f''(x) = 0$ et si $f''(t)$ change de signe lorsque t traverse la valeur x.

Bibliographie

[1] Arnaudiés J. M. ; Lelong Ferrand J. : **Cours de mathématiques - Tome 2 - Analyse**, 4^{eme} édition, Dunod Université, 1993.

[2] Arnaudiès J. M. ; Fraysse H. : **Cours de Mathématiques-2. Analyse**, Dunod, 1989.

[3] Cagnac G. ; Ramis E. ; Commomeau J. : **Traité de mathématiques spéciales - Tome 2 - Analyse**, Edition Masson et C^{ie}, 1972.

[4] Dixmier J. : **Cours de Mathematiques du premier cycle, première année**, Gauthier-Villars, 1969.

[5] Monier J. M., **Les méthodes et Exercices de Mathématiques MPSI**. Dunod Paris, 2008.